3 次元双曲多様体の組み合わせ的構造について*

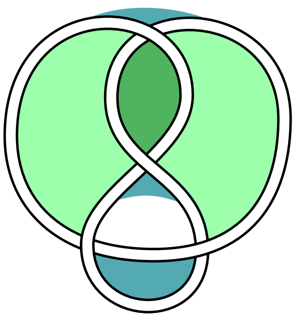
秋吉 宏尚（大阪市立大学数学研究所）†

Abstract

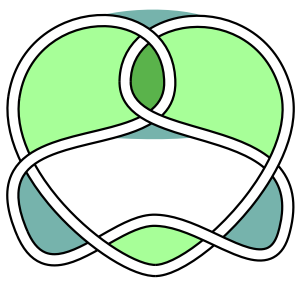
By Thurston's theorem, every Haken manifold as the complement of a knot in the 3-sphere is canonically decomposed into finitely many geometric pieces. In this talk, we will briefly see Thurston's theory on the hyperbolic uniformization of Haken manifolds, which is based on the deformation of Kleinian groups. Recently, several famous conjectures in the theory of Kleinian groups are announced to be true. We will see some of them. In the talk, we also see more concrete approach to hyperbolic manifolds, which is based on Jorgensen's theory on the quasifuchsian space of once-punctured torus groups.

1 序

図 1 に描かれているのは（実 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の 1 点コンパクト化として得られる）3 次元球面 S^3 内の**結び目**，すなわち円周 S^1 の埋め込み，である．これら K_1, K_2 の類似点，相違点をいくつか列挙してみよう．まず，いずれも種数 1 を持つことがわかる．すなわち，各結び目を境界として持ち，内部では結び目と交わらないような種数 1 の曲面（一点穴あきトーラス）が存在する．その曲面も図に描かれている．（図を見ると帯のようにアニュラスがねじれて埋め込まれているように見えるが，その上の方の一部は 2 階建て状になっていて，３６０度ひねられた帯がくっついている.）二つの結び目の重要な類似点として，どちらも双曲的結び目であるということが挙げられる．すなわち，いずれの補空間も有限体積完備双曲構造を許容する．モストウ剛性により，そのような双曲構造は位相不変である（すなわち補空間に対する一意性がある）ことがわかる．一方，二つの結び目の相違点の一つとして，K_1 は，補空間が円周上の曲面束と同相である



(a)



(b)

図 1: (a) 8 の字結び目 $K_1 = 4_1$，(b) $K_2 = 6_1$ （結び目の番号は Rolfsen の表のもの）

*Hyperbolic 3-manifolds from the viewpoint of combinatorial structure

†Hirotaka Akiyoshi（Osaka City University Advanced Mathematical Institute）

という，ファイバー結び目であるのに対して，K_2 はそうでないことが挙げられる．この違いは様々な性質の差を生み出すが，今回注目したいのは，それぞれの双曲構造に関するものである．

この講演では，これらの結び目の類似点，相違点を例として，３次元双曲多様体について考察していくことにする．

2　３次元多様体の幾何化

閉（= 向き付け可能で境界を持たずコンパクトな）曲面に対する次の事実はよく知られているだろう : 閉曲面 S はそのオイラー標数 $\chi(S)$ により分類される．さらに，

- $\chi(S) > 0$ となるのは S が 2 次元球面 S^2 と同相なときに限る．S^2 は，３次元ユークリッド空間内の単位球面として実現されるので，**球面構造**（= 定曲率 1 を持つリーマン計量）を許容する．
- $\chi(S) = 0$ となるのは S が 2 次元トーラス T^2 と同相なときに限る．T^2 は，ユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ を２つの平行移動（等長変換）$(x, y) \mapsto (x + 1, y)$, $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$ が生成する階数 2 の自由アーベル群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の作用で割ったものとして実現されるので，**ユークリッド構造**（= 定曲率 0 を持つリーマン計量）を許容する．
- $\chi(S) < 0$ となるのは種数が 2 以上の場合，すなわち，S が S^2 とも T^2 とも同相でないときである．このとき S は，双曲平面 $\mathbb{H}^2$ を等長変換群の離散部分群（フックス群）で割ったものとして実現されることがわかるので，**双曲構造**（= 定曲率 -1 を持つリーマン計量）を許容する．

補足 2.1. 一つの（種数が 2 以上の）曲面 S が許容することのできる双曲構造は一意的ではない．そこで，S が許容する（標識つき）双曲構造全体からなる空間を S のタイヒミュラー空間と呼び，Teich(S) と書くことにする．S のリーマン計量の各等角同値類は唯一つの双曲構造を含むことが知られている．従って，Teich(S) は S が許容する（標識つき）等角構造全体からなる空間とも同一視される．

上記の曲面の「幾何化」と同様なことが 3 次元多様体に対しても期待される．それが Thurston による 3 次元多様体に対する幾何化予想である．幾何化予想を述べる準備として，３次元閉多様体の標準的な分割について触れておく（[4, 6] 参照）．

３次元閉多様体 M を，埋め込まれた 2 次元球面に沿って切り開くと二つの連結成分が得られるとき，各連結成分の S^2 と同相な境界に 3 次元球体を境界で貼りつけることで 2 つの 3 次元閉多様体 M_1, M_2 が得られる．このとき，M は M_1 と M_2 の**連結和**であるといい，$M = M_1 \# M_2$ と書く．$M = M_1 \# M_2$ ならば成分 M_1，M_2 のいずれかが 3 次元球面 S^3 と同相であるとき，M は**素**であるという．

定理 2.2 (Kneser, Milnor)**.** 3 次元閉多様体は有限個の素な多様体の連結和として一意的に表される．

任意に埋め込まれた S^2 が常に埋め込まれた 3 次元球体の境界となるような多様体は**既約**であるという．素だが既約でない 3 次元閉多様体は球面と円周の直積しかないことがわかる．シェンフリースの定理により，３次元球面内の任意の結び目の補空間は既約なことがわかる．トーラス体でもクラインの壷上の閉区間束でもないような（トーラスを境界成分として持つかもしれない）3 次元多様体は，埋め込まれた任意のトーラス，クラインの壷が境界成分にアイソトピックなとき，**非トーラス的**であるという．また，曲面上の（特異ファイバーを許容する）円周束を**ザイフェルト多様体**という．図 1 に描かれた K_1, K_2 それぞれの補空間は非トーラス的で，さらに，ザイフェルト多様体ではないことがわかる．

定理 2.3 (Jaco-Shalen-Johanson)**.** 既約な 3 次元多様体は極大なザイフェルト多様体と非トーラス的な多様体の和集合として一意的に表される．

定理 2.2，2.3 により，任意の３次元閉多様体は有限個の（トーラスを境界成分として持つかもしれない）既約な非トーラス的多様体，ザイフェルト多様体，球面と円周の直積の和集合への標準的な分解を持つことがわかる．上で述べた事実から，図 1 に描かれた K_1, K_2 の補空間は，それ自体がこの標準的分割の成分であることがわかる．

ザイフェルト多様体は３次元球面 S^3，３次元ユークリッド $\mathbb{E}^3$ 構造，あるいは低い次元の構造の積 $S^2 \times \mathbb{E}^1$，$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$，$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, Nil 構造のいずれかを局所モデルとする幾何構造を許容する．ザイフェルト，双曲構造以外に，もうひとつ Sol 構造が存在する．

予想 2.4 (Thurston，幾何化予想)**.** ３次元閉多様体から定理 2.2，2.3 により得られた各多様体は，ザイフェルト構造，Sol 構造，または双曲構造を許容するだろう．

既に述べたように，K_1, K_2 の補空間はザイフェルト構造を許容しないことがわかる．また，Sol 構造を許容するのは閉多様体のみである．従って，予想 2.4 によれば，K_1, K_2 の補空間は双曲構造を許容することが期待される．そして，それは正しいことが次の定理により示された．

基本群間の単射を誘導する曲面の埋め込みで境界にアイソトピックでないようなもの（**本質的曲面**）を許す既約多様体を**ハーケン多様体**と呼ぶ．既約３次元多様体が球面と同相でない境界を持つならばハーケン多様体であることが知られている．従って，特に３次元球面内の任意の結び目の補空間はハーケン多様体である．

定理 2.5 (Thurston)**.** ハーケン多様体に対しては予想 2.4 は正しい．

Thurston の証明に従って，K_1，K_2 の補空間の有限体積完備双曲構造を構成するためのアイディアを述べておく．まず，それらがハーケン多様体であるという性質を用いると，本質的曲面で次々に切り開いていくことで，いくつかの球体へと分解することができる．その球体たちの双曲構造を構成し，徐々に構造を変形した上で逆に貼り合わせていくことで，最終的には K_1，K_2 の補空間の双曲構造を得ることができる．補空間を切り開くための最初の曲面，すなわち，双曲構造を得るために最後に貼り合わせる必要のある曲面として，図 1 に描かれた穴あきトーラスを用いることができる．その最後の貼り合わせが可能であることを保障する議論は以下のようなものである．K_1 のようにファイバー曲面で切り開く場合には,「二重極限定理」を用いて穴あきトーラス擬フックス空間 $\mathcal{QF}$ の境界内に貼り合わせ可能な構造が見つかることが保障される．一方，K_2 のようにファイバー曲面でないもので切り開くときには，切り開いた多様体の幾何学的有限な双曲構造の変形空間の上に，その不動点が貼り合わせ可能な構造となるような写像を定義し，その写像に対する「不動点定理」により証明が完成する．

3　双曲多様体とクライン群

この講演では前節で紹介した３次元多様体が許容すると期待される８つの幾何構造のうち，双曲構造に注目する．これは，一つには，双曲構造以外の幾何構造を許容する多様体はかなりよく分かっているという事実による．また，任意の３次元閉多様体は，トーラスと同相な境界成分を持ち内部が有限体積完備双曲構造を許容するような多様体の境界にトーラス体を貼り付けることにより得られることが知られていて，さらに（加算通りある）境界へのトーラス体の貼り付け方のうち，有限個の例外を除けば得られる閉多様体は双曲構造を許容することが知られている．この意味で「ほとんど全ての３次元閉多様体は双曲構造を許容する」と思うこともできるのである．これが双曲多様体を研究する大きな動機となっている．

３次元完備双曲多様体 M に対し，その普遍被覆空間を $\widetilde{M}$ とすると，局所座標系を解析接続することで，３次元双曲空間への展開写像 $\widetilde{M} \to \mathbb{H}^3$ を得ることができる．ここで，$\widetilde{M}$ は単連結・完備な双曲多様体なので，展開写像は等長同型写像であることがわかる．この写像を通して M の普遍被覆空間を $\mathbb{H}^3$ と同一視

すると，基本群 $\pi_1(M)$ は被覆変換群として $\mathbb{H}^3$ に等長的に完全不連続に作用することがわかる．こうして，$M \cong \mathbb{H}^3/\Gamma$（$\Gamma$ は $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の離散部分群）という同一視が得られる．$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の離散部分群を**クライン群**と呼ぶ．また，上のような方法で得られる準同型 $\pi_1(M) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ を**ホロノミー写像**という．

双曲平面 $\mathbb{H}^2$ は，リーマン計量 $ds^2 = |dz|^2/(\Im(z))^2$ を持つ上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ と同一視される（**上半平面モデル**）．このモデルにおいて，（向きを保つ）等長変換は 1 次分数変換 $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ となるので，等長変換群 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ は $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I\}$ と同一視される．３次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ の**上半空間モデル** $\{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}$, $ds^2 = (|dz|^2 + dt^2)/t^2$ の無限遠境界はリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と自然に同一視され，$\widehat{\mathbb{C}}$ への 1 次分数変換としての $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$ の作用は等長変換群 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ と同一視される．成分を複素化することにより，$PSL(2,\mathbb{R}) \subset PSL(2,\mathbb{C})$ とみなされるが，この包含関係は自然に $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ と対応する．

以上の事実より，３次元（２次元）双曲構造のホロノミー写像は多様体の基本群の $PSL(2,\mathbb{C})$（$PSL(2,\mathbb{R})$）への表現とみなされる．行列群の位相から，表現空間にも位相が誘導されるが，実は双曲構造の微小変形は表現の微小変形と対応することがわかる．こうした考察を基にして，双曲構造の変形空間は表現の変形空間に埋め込まれる．

4 Jorgensen 理論

この節では穴あきトーラス群に対する Jorgensen 理論について述べる．第 2 節の最後に述べたように，円周上の曲面束の双曲構造を構成するためには，曲面束をファイバー曲面で切り開いて得られる多様体，すなわち曲面と区間の直積，が許容する双曲構造を知る必要がある．Jorgensen 理論とは,（一点）穴あきトーラスと区間の直積が許容する双曲構造の，フォード領域と呼ばれる標準的な基本領域に関する理論である．

穴あきトーラス T の（２次元）有限面積完備双曲構造に関するホロノミー写像を $\rho_0 : \pi_1(T) \to PSL(2,\mathbb{R})$ とし，擬フックス空間を

$$\mathcal{QF} = \{\rho : \pi_1(T) \to PSL(2,\mathbb{C}) \mid \rho = w \circ \rho_0 \circ w^{-1},\ w : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}} : \text{擬等角同相}\ \}/\text{共役}$$

と定義する．また，$\mathcal{QF}$ の，$\pi_1(T)$ の $PSL(2,\mathbb{C})$ 表現空間における，閉包を $\overline{\mathcal{QF}}$ と書くことにする．$\rho \in \overline{\mathcal{QF}}$ に対し，双曲多様体 $\mathbb{H}^3/\mathrm{Im}\,\rho$ は $T \times (-1,1)$ に同相であることがわかり，さらに，開区間 $(-1,1)$ の両端 ± 1 に対応して $\mathbb{H}^3/\mathrm{Im}\,\rho$ には T 上の（無限遠）等角構造もしくは ending lamination として射影層状構造が自然に定義される．これら $\lambda^{\pm}(\rho)$ は $\mathrm{Teich}(T) \cong \mathbb{H}^2$ のサーストンコンパクト化 $\mathrm{Teich}(T) \cup \mathcal{PML}(T) \cong \overline{\mathbb{H}}^2$ に値をとる．こうして，**end invariant** $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^-, \lambda^+) : \overline{\mathcal{QF}} \to \overline{\mathbb{H}}^2 \times \overline{\mathbb{H}}^2 - \mathrm{diag}(\partial\mathbb{H}^2)$ が定義される．ベアスの同時一意化，および，Minsky [8] による「穴あきトーラスに対する ending lamination conjecture の肯定的解決」の一部により，次の定理が知られている．

定理 4.1. $\boldsymbol{\lambda} : \overline{\mathcal{QF}} \to \overline{\mathbb{H}}^2 \times \overline{\mathbb{H}}^2 - \mathrm{diag}(\partial\mathbb{H}^2)$ は全単射である．また，逆写像は連続である．

Jorgensen [5] により，end invariant とは異なる方法で，同じ定義域・値域を持つ写像が定義されている．以後，$\mathbb{H}^3$ に上半空間モデルを用いる．

定義 4.2. クライン群 Γ に対し，∞ の固定化群を Γ_∞ と書くことにする．このとき，Γ の**フォード領域** $Ph(\Gamma) \subset \mathbb{H}^3$ を,「$\Gamma - \Gamma_\infty$ に含まれる全ての要素に対する等長半球面の外部の共通部分」と定義する．

補足 4.3. Γ_∞ の $\mathbb{H}^3$ への作用の基本領域を Rh_∞ とすると，$Ph(\Gamma) \cap Rh_\infty$ は Γ の作用の基本領域となる．定義から，フォード領域とは「無限遠点を中心としたディリクレ領域」のようなものと思うことができる．ディリクレ領域は中心点の取り方に依存して一意的には定義されないが，我々が対象とする穴あきトーラス群に関しては，カスプに対応する放物的固定点が無限遠に（本質的に）一意的に定まるので，フォード領域は一意的に定まることがわかる．

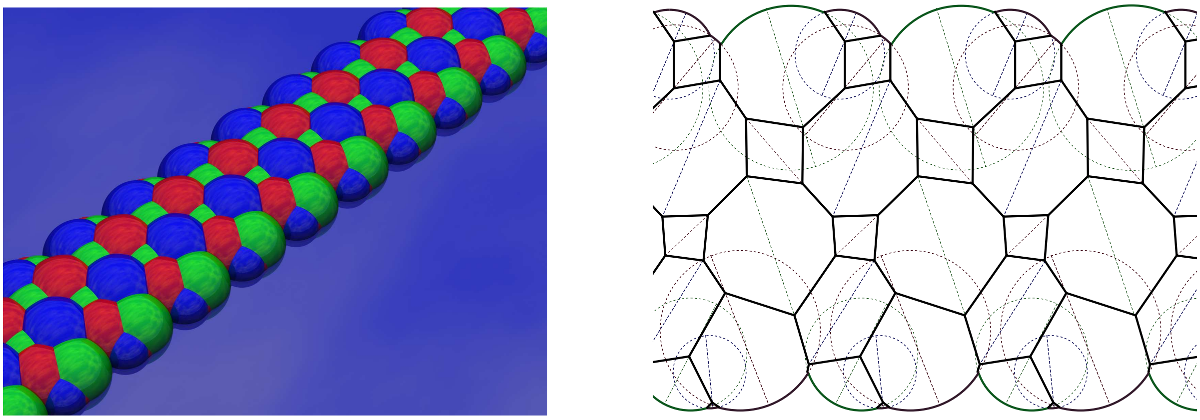


図 2: 一般的な穴あきトーラス擬フックス群のフォード領域

定理 4.4 (Jorgensen [5], cf. [3, 2])**.** 以下の性質を持つ写像 $\boldsymbol{\nu} = (\nu^-, \nu^+) : \overline{\mathcal{QF}} \to \overline{\mathbb{H}}^2 \times \overline{\mathbb{H}}^2 - \mathrm{diag}(\partial\mathbb{H}^2)$ が存在する．

(1) 任意の $\rho \in \overline{\mathcal{QF}}$ に対し，$Ph(\rho)$ の組み合わせ構造は $\boldsymbol{\nu}(\rho)$ により記述される．

(2) $\boldsymbol{\nu}$ は強位相に関して連続な全射である．さらに，その制限 $\boldsymbol{\nu}|_{\mathcal{QF}} : \mathcal{QF} \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ は同相写像である．

(3) 各 $\epsilon = \pm$ に対し，$\nu^\epsilon(\rho) \in \partial\mathbb{H}^2$ と $\lambda^\epsilon(\rho) \in \partial\mathbb{H}^2$ は同値である．さらに，これらの条件が満たされるとき，$\nu^\epsilon(\rho) = \lambda^\epsilon(\rho)$ である．

定理 4.4 により定まるパラメータ $\boldsymbol{\nu} = (\nu^-, \nu^+) : \overline{\mathcal{QF}} \to \overline{\mathbb{H}}^2 \times \overline{\mathbb{H}}^2 - \mathrm{diag}(\partial\mathbb{H}^2)$ を **side parameter** と呼ぶ．この理論の周辺で，次のような結果を得ることができる．

- Side parameter と end invariant との比較と，その帰結として凸核の双曲体積の評価（[2] 参照）
- 穴あきトーラス束の Epstein-Penner 分割の決定（[1, 7] 参照）
- 表現の離散性の判定（[9, 10] 参照）
- 二橋結び目補空間の Epstein-Penner 分割（[3] 参照）

5 今後の展望

次の問題を考えたい．

問題 5.1. 2 枚の穴あきトーラスを境界として持つ 3 次元多様体のフォード領域を特徴づけよ．

第 4 節で述べたように，図 1 に描かれた K_1 の補空間を始めとする，穴あきトーラス束の双曲構造は，Jorgensen 理論によってフォード領域を用いて組み合わせ的にも精密に理解される．そこで，K_2 の補空間のような非ファイバー曲面を含む多様体の双曲構造も組み合わせ構造の観点から理解できるのではないかと期待している．すなわち，次の表の「???」を埋めることを目指す．

	解析的議論	組み合わせ的議論
ファイバー曲面	二重極限定理	Jorgensen 理論
非ファイバー曲面	不動点定理	???

参考文献

[1] H. Akiyoshi, *On the Ford domains of once-punctured torus groups*, in *Hyperbolic spaces and related topics*, RIMS, Kyoto, Kokyuroku 1104 (1999), 109-121.

[2] H. Akiyoshi, *End invariants and Jorgensen's angle invariants of punctured torus groups*, in *Perspectives of Hyperbolic Spaces II*, RIMS, Kyoto, Kokyuroku 1387, 59–69 (2004).

[3] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)*, preprint.

[4] J. Hempel, "3-Manifolds", Annals of Mathematics Studies 86, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.

[5] T. Jorgensen, *On pairs of punctured tori*, unfinished manuscript, available in Proceeding of the workshop "Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds" (edited by Y.Komori, V.Markovic and C.Series), London Math. Soc., Lect. Notes 299 (2003), 183–207.

[6] M. Kapovich, "Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups", Progress in Mathematics 183, Birkhäuser, 2000.

[7] M. Lackenby, *The canonical decomposition of once-punctured torus bundles*, Comment. Math. Helv. 78 (2003), no. 2, 363–384.

[8] Y. Minsky, *The classification of punctured torus groups*, Ann. of Math. 149 (1999), 559–626.

[9] M. Wada, *OPTi*, a Macintosh softoware, available from:
`http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~wada/index-jp.html`

[10] Y. Yamashita, *Computer experiments of the discreteness locus in projective structures*, to appear in the proceeding of the workshop, "Spaces of Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds", London Math. Soc., Lect. Notes. Edited by Y. Minsky, M. Sakuma, and C. Series.

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学 数学研究所
e-mail: akiyoshi@sci.osaka-cu.ac.jp