Quantum Painlevé Systems of type $A^{(1)}_{n-1}$

Hajime Nagoya (Tohoku University)

概 要

Painlevé equations ($\mathrm{P_I}$, $\mathrm{P_{II}}$, $\mathrm{P_{III}}$, $\mathrm{P_{IV}}$, $\mathrm{P_V}$, $\mathrm{P_{VI}}$) are discovered by P. Painlevé and B. Gambier in the classification of second order ordinary differential equations without movable singular points in their solutions. Later, K. Okamoto revealed the Hamiltonian structure of Painlevé equations and found Painlevé equations admit the actions of the affine Weyl groups. Therefore, Painlevé equations are the Hamiltonian system with affine Weyl group symmetry. In this article, we consider a canonical quantization of Painlevé equations with affine Weyl gruop symmtries.

1 Introduction

本講演では Painlevé 方程式の正準量子化及びその一般化について説明する.

Painlevé 方程式は, 動く分岐点を持たないという条件で２階の常微分方程式を分類し, Painlevé 及びその弟子である Gambier が２０世紀初頭に発見した方程式である. その後の１９８０年代に岡本和夫が解を解に移す変換として Painlevé 方程式がアフィン Weyl 群作用を持つことを発見した.

Painlevé 方程式は Hamilton 系として書けるのでその正準量子化が考えられる. Painlevé 方程式の Hamiltonian は正準座標変数の多項式で書けるが, その量子 Hamiltonian は一意的には書けない. そこで性質の良い量子化を考えるにあたって, アフィン Weyl 群作用を保つという条件を考える. 実際に第２, 第４, 第５ Painlevé 方程式においてそのような性質の良い量子化が存在することが確かめられる. [?]

一方, Painlevé 方程式及び一般のアフィン Weyl 群対称性を持つ微分方程式がアフィン Lie 環を用いて構成されることが知られており, その方程式系も $A^{(1)}_l$ の場合には正準量子化できることがわかっている. [?]

以下では, まず具体例を用いて Painlevé 方程式のアフィン Weyl 群対称性を説明し, その正準量子化を構成する. その後, 一般的に説明する.

2 量子第４ Painlevé 方程式

初めに, 古典の場合の第４ Painlevé 方程式 $\mathrm{P_{IV}}$ の対称形式を用いて説明する. $\mathrm{P_{IV}}$ の対称形式とは次のような方程式のことである.

$$\begin{aligned} f_1' &= f_1(f_2 - f_3) + \alpha_1, \\ f_2' &= f_2(f_3 - f_1) + \alpha_2, \\ f_3' &= f_3(f_1 - f_2) + \alpha_3, \end{aligned}$$

ただし, $f_i = f_i(t)$, $' = \frac{d}{dt}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ とする. ここで $\alpha_i = 0$ ならば, Lotka-Volttera 方程式であって $f_i = t$, $\alpha_i = 1$ は解であることに注意しておく.

次にアフィン Weyl 群対称性について説明する．$K=\mathbb{C}(f_i,\alpha_i)$ を有理関数体とする．K 上の準同型 s_i $(i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ を次で定める．

$$\begin{aligned} s_i(f_i)&=f_i, \quad s_i(f_{i\pm1})=f_{i\pm1}\pm\frac{\alpha_i}{f_i},\\ s_i(\alpha_i)&=-\alpha_i, \quad s_i(\alpha_{i\pm1})=\alpha_{i\pm1}+\alpha_i. \end{aligned}$$

このとき,

$$s_i(f_j)'=s_i(f_j)(s_i(f_{j+1})-s_i(f_{j-1}))+s_i(\alpha_j).$$

この等式は s_i と $'$ が可換であると言い換えることができる．この等式から $f_i=t$, $\alpha_i=1$ に s_1 を作用させた

$$\begin{aligned} &s_1(f_1)=t, \quad s_1(f_2)=t+\frac{1}{t}, \quad s_1(f_3)=t-\frac{1}{t},\\ &s_1(\alpha_1)=-1, \quad s_1(\alpha_2)=2, \quad s_1(\alpha_3)=2 \end{aligned}$$

は $\mathrm{P_{IV}}$ の対称形式の解である．s_1 をさらに作用させていけば, 無限個の解が作れる．これは非線形常微分方程式においては顕著な事象である．

s_i は $A_2^{(1)}$ 型の Affine Weyl 群の作用をなす:

$$s_i^2=1, \quad s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1}.$$

これらのことから, $\mathrm{P_{IV}}$ はアフィン Weyl 群対称性を持つという．

$H\in K$ を次で定める．

$$H=f_1f_2f_3+\sum_{i=1}^{3}\epsilon_i(f_i+f_{i-1}),$$

ただし, $\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}+\delta_{i,0}$. K 上の Poisson 括弧を次で定める．

$$\{f_i,f_{i+1}\}=1, \quad \{f_i,\alpha_j\}=\{\alpha_i,\alpha_j\}=0.$$

このとき,

$$f_i'=\{H,f_i\}+\delta_{i,0}.$$

次に量子 $\mathrm{P_{IV}}$ を構成する．

$\mathcal{K}$ を次で定まる $\mathbb{C}$ 上の斜体とする．

$$\begin{aligned} &\text{生成元:} \quad \hat{f}_i,\epsilon_i, \quad (i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}),\\ &\text{関係式:} \quad [\hat{f}_i,\hat{f}_{i+1}]=h, \quad [\hat{f}_i,\alpha_j]=[\alpha_i,\alpha_j]=0, \quad (h\in\mathbb{C}). \end{aligned}$$

$\mathcal{K}$ 上に $\mathbb{C}$-derivation ∂ を次で定めることができる．

$$\partial(\hat{f}_i)=\hat{f}_i\hat{f}_{i+1}-\hat{f}_{i-1}\hat{f}_i+\alpha_i, \quad \partial(\alpha_i)=0,$$

ただし, $\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}$. この方程式の事を量子 $\mathrm{P_{IV}}$ という．$h=0$ のとき古典 $\mathrm{P_{IV}}$ となることは明らかであろう．

$\hat{H}\in\mathcal{K}$ を次で定める．

$$\hat{H}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\hat{f}_i\hat{f}_{i+1}\hat{f}_{i+2}+\sum_{i=1}^{3}\epsilon_i(\hat{f}_i+\hat{f}_{i-1}).$$

このとき,

$$\partial(\hat{f}_i) = \frac{1}{h}[\hat{H}, \hat{f}_i] + \delta_{i,0} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i.$$

さらに, $\mathcal{K}$ 上の準同型 s_i $(i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ を次で定めることができる.

$$s_i(\hat{f}_i) = \hat{f}_i, \quad s_i(\hat{f}_{i\pm1}) = \hat{f}_{i\pm1} \pm \frac{\alpha_i}{\hat{f}_i},$$
$$s_i(\alpha_i) = -\alpha_i, \quad s_i(\alpha_{i\pm1}) = \alpha_{i\pm1} + \alpha_i.$$

このとき,

$$\partial(s_i(\hat{f}_j)) = s_i(\hat{f}_j)s_i(\hat{f}_{j+1}) - s_i(\hat{f}_{j-1})s_i(\hat{f}_j) + s_i(\alpha_j).$$

また s_i は $A_2^{(1)}$ 型 Affine Weyl 群の作用をなす.

3 Quantum Painlevé Systems of type $A_{n-1}^{(1)}$

最後に一般的な取り扱いを述べる.

3.1 Lax equations

$\mathcal{K}_{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$ を次の生成元と関係式で定まる $\mathbb{C}$ 上の斜体とする.

$$\text{生成元:} \quad f_{i,i+j}, \epsilon_i \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1) \tag{1}$$
$$\text{関係式:} \quad \epsilon_i \text{は他と可換}, \tag{2}$$
$$[f_{ij}, f_{kl}] = h(\delta_{j\equiv k} f_{i,l+j-k} - \delta_{l\equiv i} f_{k,l+j-i}), \tag{3}$$

ただし $h \in \mathbb{C}$ とし

$$\delta_{i\equiv j} = \begin{cases} 1 & (i \equiv j \pmod{n}) \\ 0 & (i \not\equiv j \pmod{n}) \end{cases}, \quad f_{ij} = \begin{cases} 1 & (j-i=m) \\ 0 & (j-i>m) \end{cases} \tag{4}$$

であるとする. また $\epsilon_{i+n} = \epsilon_i$, $f_{i+n} = f_i$ とする. 上の関係式で定まる代数は Ore domain であることが示され, その商体が $\mathcal{K}_{m,n}$ である. 定義関係式は $f_{i,j+ns}$ を $z^{-s}E_{ji}$ と見たものに対応している. (E_{ij} は行列単位)

Definition 1 *$\mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]$ を z, z^{-1} の多項式環とし, $Mat(n, \mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}])$ の元である行列 M_i $(0 \leq i)$, Λ, M, B を次で定める.*

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}\epsilon_i, \quad M_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} f_{i,i+j} \quad (1 \leq j), \quad \Lambda = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + zE_{n,1}, \tag{5}$$
$$M = \sum_{i=0}^{\infty} M_i \Lambda^i, . \tag{6}$$

行列 M の例として $m=4,\ n=5$ のときを挙げる.

$$M=\begin{bmatrix} \epsilon_1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} & 1 \\ z & \epsilon_2 & f_{23} & f_{24} & f_{25} \\ zf_{36} & z & \epsilon_3 & f_{34} & f_{35} \\ zf_{46} & zf_{47} & z & \epsilon_4 & f_{45} \\ zf_{56} & zf_{57} & zf_{58} & z & \epsilon_5 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

このように変数の場所と添え字が一致している.

∂_z を $\mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}]$ の $\mathcal{K}_{m,n}$-derivation で z を 1 に移すものとする. 行列 $C=\sum_{i=0}^{p} c_i\Lambda^i$ を Λ の多項式と見て, $C_{\geq q}=\sum_{i=q}^{p} c_i\Lambda^i$, $C_{<q}=\sum_{i=0}^{q-1} c_i\Lambda^i$ と定める.

Theorem 2 $s,k\in\mathbb{N}$ とし $ns>m(k-1)$ と仮定する. このとき $\mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}]$ 上の $\mathbb{C}[z,z^{-1}]$-*derivation* $\partial_{s,k}$ を次の *Lax* 方程式で定めることができる.

$$\partial_{s,k}(M)=[M,B_{s,k}]+\kappa z\partial_z(B_{s,k}), \tag{8}$$

ただし $B_{s,k}=(M^k)_{\geq ns}\cdot z^{-s}$, $\kappa\in\mathbb{C}$ とする.

M や $B_{s,k}$ を Λ の多項式と見たとき, 条件 $ns>m(k-1)$ は $\partial_{s,k}(M)$ の次数が $z\partial_z(B_{s,k})$ の次数以上であることを意味することがわかる.

$m=2,\ s=1,\ n=2k+1\ (k\in\mathbb{N})$ のときの例を与える. 定義関係式は次のようになる.

$$[f_{i,i+1},f_{i+1,i+2}]=h,\quad [f_{i,i+1},f_{j,j+1}]=0\quad (j\neq i\pm 1).$$

Lax 方程式 (**??**) から次を得る.

$$\begin{aligned}\partial_{1,k}(M_1)=&\sum_{p+q=1}\left(M_p(M^k_{n+q})^{(p)}-M^k_{n+q}M_p^{(q)}\right)+\kappa\lambda_1 M^k_{n+1}\\ =&M_1\left(\sum_{p=1}^{k-1}M_1^{2(p-1)}\right)^{(1)}-\left(\sum_{p=2}^{k}M_1^{2(p-1)}\right)M_1+M_0-M_0^{(1)}+\kappa\lambda_1.\end{aligned}$$

従って $1\leq i\leq n$ に対して次を得る.

$$\partial_{1,k}(f_{i,i+1})=f_{i,i+1}\left(\sum_{p=1}^{k-1}f_{i+2p-1,i+2p}\right)-\left(\sum_{p=1}^{k-1}f_{i+2p,i+2p+1}\right)f_{i,i+1}+\alpha_i,$$

ただし $\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}\ (1\leq i\leq n-1)$, $\alpha_n=\epsilon_n-\epsilon_1+\kappa$. $\partial_{1,k}$ が定めるこれらの微分方程式系は $A_{2k}^{(1)}$ 型の量子野海・山田系 である [**?**].

3.2 Affine Weyl group symmetry

Definition 3 行列 G_i *(*$1\leq i\leq n$*)* を次で定義する*.*

$$G_i=\exp\left(E_{i+1,i}\frac{\alpha_i}{f_{i,i+1}}\right)\quad (1\leq i\leq n-1),\quad G_n=\exp\left(z^{-1}E_{1,n}\frac{\alpha_i}{f_{i,i+1}}\right) \tag{9}$$

ただし $\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}$ *(*$1\leq i\leq n-1$*)*, $\alpha_n=\epsilon_n-\epsilon_1+\kappa$*.*

Proposition 4 $\mathcal{K}_{m,n}$ 上の準同型 s_i $(1 \le i \le n)$ を次で定めることができる.

$$\kappa z\partial_z + s_i(M) = G_i(\kappa z\partial_z + M)G_i^{-1}. \tag{10}$$

Theorem 5 *(1)* s_i $(1 \le i \le n)$ *は* $\mathcal{K}_{m,n}$ *上に* $A_{n-1}^{(1)}$ *型アフィン Weyl 群の表現を構成する. すなわち次の関係式を満たす.*

$$s_i^2 = 1, \quad (s_i s_j)^3 = 1 \ (j = i \pm 1), \quad s_i s_j = s_j s_i \ (j \ne i \pm 1), \tag{11}$$

ただし $n = 2$ のときは $(s_i s_{i\pm1})^3 = 1$ はみたさない.

(2) $s, k \in \mathbb{N}$ *に対して,* s_i $(1 \le i \le n)$ *は* $\partial_{s,k}$ *と可換である.*

すなわち前節で構成した Lax 方程式は $A_{n-1}^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群対称性を持つ.

3.3 Hamiltonians

$g(z) \in \mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]$ に対して g_i を z^i の係数とする.

Definition 6 *(Hamiltonians)* $s, k \in \mathbb{N}$ *に対して,* $H_{s,k} \in \mathcal{K}_{m,n}$ *を次式で定める.*

$$H_{s,k} = \frac{\mathrm{tr}\left(M^{k+1}\right)_s}{k+1}. \tag{12}$$

$m = 2, n = 3, s = 1, k = 2$ のとき

$$\begin{aligned} H_{1,2} = \mathrm{tr}\left(\frac{M^3}{3}\right)_1 &= \frac{1}{3}\left(f_{1,2}f_{2,3}f_{3,4} + f_{2,3}f_{3,4}f_{1,2} + f_{3,4}f_{1,2}f_{2,3}\right) \\ &+ \epsilon_1(f_{1,2} + f_{3,4}) + \epsilon_2(f_{2,3} + f_{1,2}) + \epsilon_3(f_{3,4} + f_{2,3}). \end{aligned}$$

$H_{1,2}$ は量子 $\mathrm{P_{IV}}$ のハミルトニアンである [?].

$r \in \mathbb{N}$ に対して, $\bar{r}$ $(0 \le \bar{r} \le m-1)$ を m で割ったあまりとする. 集合 $A_{m,n}$ を次で定める.

$$A_{m,n} = \left\{ (s,k) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} ns = mk \\ \text{or} \\ mk > ns > m(k-1), \quad \overline{ns} \ge \overline{n}, \overline{2n}, \ldots, \overline{n(s-1)} \end{array} \right\}. \tag{13}$$

Theorem 7 $(s,k), (s',k') \in A_{m,n}$ *であればこのとき次が成立する.*

$$\frac{1}{h}\left[H_{s,k}, M\right] = \left[M, B_{s,k}\right], \tag{14}$$

$$\left[H_{s,k}, H_{s',k'}\right] = 0. \tag{15}$$

対応する古典系では任意の (s,k) に対して上の定理 (に対応する命題で交換子はポワソン括弧となる) は成り立つ.

参考文献

[1] Nagoya, H.: Quantum Painlevé Systems of Type of $A_l^{(1)}$, Int. J. Math. **15** (2004), no. 10, 1007–1031

[2] Nagoya, H.: Quantum Painlevé Systems of Type $A_{n-1}^{(1)}$ with higher degree Lax operators, preprint