平坦なアフィン計量を持つ中心アフィン曲面と余法線写像
Centroaffine surfaces with flat affine metric and conormal maps

中條　大介（Daisuke Nakajo）
九州大学大学院数理学府

Ferapontov showed the existence of potential for centroaffine surfaces with flat affine metric, write down compatibility conditions of them in terms of thier potential functions, and found it is the same as the equation which is studied in Dubrovin's paper. Recently, we study the condition for an equiaffine surface to have the conormal map which is affine equivalent to a centroafine surface with flat affine metric.

1. Introduction

アフィン微分幾何は、ユークリッド空間にはめ込まれた多様体のアフィン変換で不変な性質を微分幾何的に調べる幾何である．特に、１９８０年代に入ってから（主に）野水克己と佐々木武の研究により大きな発展を遂げた．そこでは、アフィン法線がある１点を通る、またはすべてのアフィン法線が平行であるような Blaschke 曲面であるアフィン球面や、アフィン計量の体積要素の積分で定義される汎関数の臨界点となるアフィン極小超曲面などの性質が深く興味を持たれてきた．例えばアフィン計量が平坦、あるいはより広く、アフィン計量が定曲率であるような $\boldsymbol{R}^3$ 内のアフィン球面の分類は [2] で考察されている．

しかし、平坦なアフィン計量をもつ、アフィン球面でないアフィン曲面については余り関心が持たれていなかった．そのような状況の中、Ferapontov は [2] でアフィン計量が平坦である中心アフィン曲面をそのポテンシャルの存在により特徴付け、さらにそのポテンシャルが位相的場の理論に現れる方程式 ([1]) の解になっていることを発見した．これに関連して今回、与えられた等積アフィン曲面に対してその余法線写像が、アフィン計量が平坦である中心アフィン曲面とアフィン同値であるための条件を求めた．

2. アフィン超曲面論について

アフィン微分幾何では、主に $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内にはめ込まれた部分多様体の、アフィン変換で不変な性質を調べる．今回の講演では特に曲面の $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込みを考察するので、ここでは $\boldsymbol{R}^{n+1}$ への超曲面はめ込み $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ に付随するアフィン不変量について説明する．詳しい解説については [3] を参考にして頂きたい．また、曲面論の基本的な事柄については [4] が詳しい．

$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内の超曲面、D を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準接続とする．このとき、f に横断的なベクトル場 ξ をひとつ固定すると、各点におけ

る接空間の直和分解を用いて、

$$\begin{cases} D_X f_* Y &= f_*(\tilde{\nabla}_X Y) + g(X,Y)\xi, \\ D_X \xi &= -f_* SX + \tau(X)\xi \end{cases}$$

という式が得られる（Gauss-Weingarten の式）．このような、はめ込み f とそれに横断的なベクトル場 ξ の組 (f,ξ) をアフィンはめ込みという．このとき、接続 D および微分 f_* の性質から g,S 及び τ はテンソルであることがわかる．たとえば、g が対称 $(0,2)$ - テンソルであることは次のようにして分かる．M 上の C^∞ 級ベクトル場 X,X_1,X_2,Y 及び M 上の C^∞ 函数 φ に対して、

$$D_{X_1+X_2} f_* Y = f_*(\tilde{\nabla}_{X_1+X_2} Y) + g(X_1+X_2, Y)\xi$$

と、

$$\begin{aligned} D_{X_1+X_2} f_* Y &= D_{X_1} f_* Y + D_{X_2} f_* Y \\ &= f_*(\tilde{\nabla}_{X_1} Y + \tilde{\nabla}_{X_2} Y) + \{g(X_1,Y) + g(X_2,Y)\}\xi \end{aligned}$$

から、

$$g(X_1+X_2, Y) = g(X_1,Y) + g(X_2,Y)$$

が成り立ち、

$$D_{\varphi X} f_* Y = f_*(\tilde{\nabla}_{\varphi X} Y) + g(\varphi X, Y)\xi$$

と、

$$D_{\varphi X} f_* Y = \varphi D_X f_* Y = f_*(\varphi \tilde{\nabla}_X Y) + \{\varphi g(X,Y)\}\xi$$

から、

$$g(\varphi X, Y) = \varphi g(X,Y)$$

が成り立つ．$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の標準接続 D が捩れを持たないことから g が対称テンソルであることがわかるので、これらをあわせて g が対称 $(0,2)$ - テンソルであることが分かる．S 及び τ に対しても同じ方法でそれぞれ、$(1,1)$ - テンソル、$(0,1)$ - テンソルであることを示すことが出来る．g,S,τ はそれぞれアフィン計量、型作用素、及び横断的接続形式と呼ばれている．同様にして $\tilde{\nabla}$ は M 上の接続を定めることもわかり、これは誘導接続と呼ばれている．特に注意すべきこととして、$\tilde{\nabla}$ が捩れを持たないという事実があり、これは標準接続 D が捩れを持たないことに由来している．また、2 階対称テンソル g の非退化性は横断的ベクトル場 ξ のとり方に依らないことがわかる．はめ込み f が非退化であるとは、g が非退化であるときをいう．以下、非退化なはめ込みを考えるが、このとき、一般に g は擬リーマン計量となる．g の Levi-Civita 接続を ∇ と表す．その誘導接続との差、$K = \tilde{\nabla} - \nabla$ はテンソルを定め、これを差テンソルという．ここで、３次形式 C を、

$$C(X,Y,Z) = -2g(K_X Y, Z)$$

により定めると、差テンソルの定義やアフィン計量（第２基本形式）に関する Codazzi 方程式などから、C が対称３次形式となることがわかる．これを Codazzi テンソル（または単に３次形式）という．

横断的ベクトル場 ξ として、はめ込み f の位置ベクトルをとれるとき、組 (f,ξ) を中心アフィンはめ込みという．このとき、$\tau = 0$、$S = -id$

が成り立つ．

はめ込み $f: M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ に対して、

$$\theta(X_1, \cdots, X_n) := \omega(f_* X_1, \cdots, f_* X_n, \xi)$$

とおくと、θ は M の体積要素となる．これを、誘導された体積要素という．（ここで、ω は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の標準的な体積要素である．）

誘導された体積要素 θ に関して、$\tilde{\nabla}\theta = 0$ を満たすはめ込み f と横断的ベクトル場 ξ の組 (f, ξ) のことを等積はめ込みという．これは $\tau = 0$ と同値であり、定義より任意の $X \in T_pM$ $(p \in M)$ に対して $D_X \xi$ が T_pM に属すること同値となることがわかる．

等積はめ込みの中でもさらに特別なはめ込みとして Blaschke はめ込みがある．これは等積はめ込みであり、さらに誘導された体積要素 θ がアフィン計量 g から定まる体積要素 ω_g に一致するというはめ込みである．非退化はめ込み $f: M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ が与えられたとき、横断的ベクトル場 ξ を適当に取り替えることにより、Blaschke はめ込みにすることが出来るということが知られている．そのような横断的ベクトル場 ξ は、はめ込みに対し一意的に定まることがわかり、その ξ をアフィン法ベクトル場という．

アフィンはめ込み (f, ξ) に対して、余法線写像 $\nu: M^n \to (\boldsymbol{R}^n)^*$ を、

$$\nu_x(f_* TM) = 0, \nu_x(\xi_x) = 1$$

となるように定める．（ここで、$f^*TM\mid_x$ と $\boldsymbol{R}^n$ とを同一視した．）

最後に、アフィンはめ込み (f, ξ) において（中心アフィンはめ込みや Blaschke はめ込みのように）容易に横断的ベクトル場 ξ が類推されるとき、単に f のみで (f, ξ) を表わす場合もあることを注意しておく．

3. 平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面とそのポテンシャル

Ferapontov が [2] で示した平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面のポテンシャルの存在は、次の定理に依っている．ここで、曲面 M の計量 g が平坦であるとは、g の Levi-Civita 接続 ∇^g が平坦である、すなわち ∇^g のリーマン曲率[1] R^{∇^g} に関して $R^{\nabla^g} \equiv 0$ が成り立つことをいう．なお、以下の補題や定理はすべて局所的な状況でのみ成り立つものである．

Theorem 1. $f: M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ を平坦なアフィン計量を持つ M^n の中心アフィンはめ込みとし、C を、そのアフィン計量及び誘導接続から定まる *Codazzi* テンソルとする．このとき M^n の任意の点 p において、その単連結な近傍 U とその上で定義された関数 F が存在し、g に関するアフィン座標 $\{u^1, \cdots, u^n\}$ における成分表示の下で次の式が U 上で成立する．

$$C_{ijk} = \partial_i \partial_j \partial_k F. \tag{1}$$

[1] 接続 ∇ に対してリーマン曲率 R^∇ を $R^\nabla(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ により定める．

この定理により定義された関数 F を、ここでは平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面のポテンシャルと呼ぶことにする．この定理は次の、３次形式の Levi-Civita 接続による共変微分の対称性に関する補題と、Poincaré の補題を用いて証明される．

Lemma 2. アフィン計量が平坦、すなわちアフィン計量の *Levi-Civita* 接続を ∇ としたとき $R^{\nabla}=0$ となるならば、

$$\nabla_X C(Y,Z,W)=\nabla_Y C(X,Z,W)$$

が成り立つ．

結局、以下のように平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面の偏微分方程式による特徴付けが、Gauss 方程式を考えることにより得られることが分かる．次の定理は、平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面の可積分条件をポテンシャル F で表したものである．

Theorem 3. $\boldsymbol{R}^2$ の単連結領域 U 上で定義されたアフィン計量が平坦かつ不定値である非退化な中心アフィン曲面 $f:U\to\boldsymbol{R}^3$ 全体の集合と、$F:U\to\boldsymbol{R}^2$ に関する方程式

$$F_{xxx}F_{yyy}-F_{xxy}F_{xyy}=1 \tag{2}$$

の解の集合とが１対１に対応する．

4. 平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面と余法線写像

与えられた等積アフィン曲面に対して、その余法線写像から定まる中心アフィン曲面がアフィン計量が平坦である中心アフィン曲面とアフィン同値であるための条件について考察する．その前にアフィン曲面とその余法線写像について、それぞれのアフィン計量と誘導接続の間に一般的に成り立つ関係を考える．ここでは特に平坦なアフィン計量を持つ中心アフィン曲面の場合に制限して考え、それをポテンシャルを用いた形で表す．

Lemma 4. $\bar{f}:\bar{M}^2\to\boldsymbol{R}^3$ を不定値で平坦なアフィン計量をもつ非退化中心アフィン曲面とし、F をそのポテンシャルとする．（従って、アフィン座標系の下で $\bar{f}$ のアフィン計量は $g_{ij}=\eta_{ij}$ となる．ここで、$\eta_{ij}:=1-\delta_{ij}$ である．） また、$f:M^2\to\boldsymbol{R}^3$ を等積アフィン曲面とし、g をそのアフィン計量、∇ を誘導接続、S を型作用素、ν_f を f の余法線写像とする．ここで、S は M^2 の各点 x で正則であるとする．このとき、ν_f が $\bar{f}$ にアフィン同値であるための必要十分条件は、

$$\begin{cases} g_{ij} &= t_i^j\eta_{kj}\cdots(g)\\ \Gamma_{im}^l g_{lj}g^{mk} &= g^{lk}(\partial_i g_{lj})-\eta^{kl}F_{ijk}\cdots(\nabla)\end{cases}$$

となる．ここで、g_{ij}、Γ_{ij}^k と t_i^j は、それぞれアフィン計量 g の成分, ∇ の *Christoffel* 記号、および $(1,1)$ テンソル $T:=S^{-1}$ の成分である．

これと、２つの（中心）アフィンはめ込みが同値であるための条件を考慮して、次の定理を得る．

Theorem 5. $\bar{f}:\bar{M}^2\to\boldsymbol{R}^3$ を不定値で平坦なアフィン計量をもつ非退化中心アフィン曲面とし、F をそのポテンシャルとする.（従って、アフィン座標系の下で $\bar{f}$ のアフィン計量は $g_{ij}=\eta_{ij}$ となる.）このとき、g をアフィン計量、∇ を誘導接続、S を型作用素とし、その余法線写像 ν_f が $\bar{f}$ とアフィン同値となるような等積アフィン曲面 $f:M^2\to\boldsymbol{R}^3$ が存在するための必要十分条件は、

$$
\begin{cases}
g_{ij} &= t_i^j\eta_{kj}\\
\Gamma^l_{im}g_{lj}g^{mk} &= g^{lk}(\partial_i g_{lj})-\eta^{kl}F_{ijk}\\
\partial_1 t_{21}-\partial_2 t_{11} &= t_{22}F_{111}-t_{11}F_{122}\\
\partial_1 t_{22}-\partial_2 t_{12} &= t_{22}F_{112}-t_{11}F_{222}
\end{cases}
\tag{3}
$$

となる. ここで、g_{ij}、Γ^k_{ij} と t_i^j は、それぞれアフィン計量 g の成分, ∇ の *Christoffel* 記号、および $(1,1)$ テンソル $T:=S^{-1}$ の成分である.

References

[1] B. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories.* In:*Integrable systems and quantum groups. Montecatini, Terme 1993* (M. Francoviglia, S. Greco, eds.), Lecture Notes in Math. **1620** Springer-Verlag (1996), 120–348.

[2] E. Ferapontov, *Hypersurfaces with flat centroaffine metric and equations of associativity*, Geom. Dedicata **103(3)** (2004), 33–49.

[3] 野水克己・佐々木武, **アファイン微分幾何学 - アファインはめ込みの幾何 -**, 裳華房, 1994.

[4] 梅原雅顕・山田光太郎, **曲線と曲面 - 微分幾何的アプローチ -**, 裳華房, 2002.