F-thresholds and jumping coefficients.

北海道大学理学研究科数学専攻修士 2 年 廣瀬大輔

概 要

I will introduce the work of M. Mustaţă, S. Takagi, and K. Watanabe. F-thresholds are one of the tools of commutative ring theory in positive characteristic. But there is an analogue of the jumping coefficients of multiplier ideals in characteristic 0.

1 はじめに

ここでは [MTW] を中心に F-thresholds について紹介したいと思います. F-thresholds とは正標数の可換環上のイデアルに対して定まる量で, 最近の tight closure の理論の流れである複素数体 (標数 0 の体) 上の代数多様体の特異点論との対応を目指す試みのひとつです. そもそも tight closure とは Hochster と Huneke により 1980 年代に定義されたイデアルになされる演算で (その定義のみ 3 節で触れます), 純粋に環論的問題を解くための道具として生まれました [HH]. それが最近になって特異点の中でも特異点解消時の discrepency により定まるクラスの特異点を標数 p に還元することで tight closure や Frobenius 射により特徴づけられることがわかってきました. F-thresholds は上のクラスの特異点を扱う際に現れる乗法イデアルの jumping coefficients との対応が期待されています.

2 F-thresholds の定義

まず F-thresholds を定義します. 普通は環 R を正標数 $p > 0$ の n 次元正則局所環としますが, ここでは次の環を思い浮かべていただければ十分です.

$$\mathbb{F}_p[X_1, \cdots, X_n]_{(X_1,\cdots,X_n)} := \{\frac{f}{g} | f, g \in \mathbb{F}_p[X_1, \cdots, X_n], g(0, \cdots, 0) \neq 0\}.$$

$\mathbb{F}_p$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ のことで p 倍すると元は消えることから $I = (y_1, \cdots, y_s) \subseteq R$ なるイデアルと整数 $e \geq 1$ に対して

$$I^{[p^e]} := (y^{p^e} | y \in I) = (y_1^{p^e}, \cdots, y_s^{p^e})$$

と定めることができます．また R 上の Frobenius 射 $F: R \to R$ を

$$F: R \to R$$

$$x \mapsto x^p$$

と定めると $I^{[p^e]} = F^e(I)$ と見ることができます．これで題にある F-thresholds を定義できます．

定義 2.1 (F-thresholds)**.** *$f \in R, J \subseteq R$ と置いたとき (実際は f の代わりにイデアル $\mathfrak{a}$ を指定して $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq Rad(J) \subsetneq R$ なるものとしてとってきます.)f の J に対する p^e での thresholds $\nu_f^J(p^e)$ を次のように定める.*

$$\nu_f^J(p^e) := \max\{r \in \mathbb{N} | f^r \notin J^{[p^e]}\}.$$

この thresholds を用いて f の J に対する F-thresholds $c^J(f)$ を次のように定める．

$$c^J(f) := \lim_{e \to \infty} \frac{\nu_f^J(p^e)}{p^e}.$$

F-thresholds に関する性質のうちで基本的なものを挙げておきます.

- $0 < c^J(f) < \infty$ となる.
- $f = ag$ ならば $c^J(f) \leq c^J(g)$ となる.
- 逆に $J \subseteq J'$ ならば $c^{J'}(f) \leq c^J(f)$ となる．このことから R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対する f の F-thresholds が f の最小の F-thresholds である.

F-thresholds はどのような意味を持つ量なのかという疑問には次節の test イデアルを見ることで答えられると思います.

3 test イデアルとの関係

test イデアルとは tight closure の理論の中心になるものとして定義されました. ちなみに tight closure とはイデアルになされる演算でイデアル I の tight closure を I^* と書き

$$z \in I^* \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists c \in R \setminus \{0\} \ s.t. \ cz^{p^e} \in I^{[p^e]}, \ e \gg 0$$

と定義されます．test イデアルは全てのイデアル I に対して上の c となることのできる (まさに tight closure に入るかどうかを test する) イデアルとして定義されましたが最初に書いたように, 幾何学的な対応を目指した一般化のなかで次のようなかたちとなりました.

まず E を R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ による剰余体 k の injective hull とします. この一般元を具体的に書くと次の形になります.

$$E \ni w = [u/(x_1 \cdots x_n)^d].$$

ここで x_i は $R = \mathbb{F}_p[X_1, \cdots, X_n]_{(X_1,\cdots,X_n)}$ で考えるならばそのまま不定元 X_i として, 普通の R で考えるならば正則パラメータとします. また同値関係 $[u/(x_1 \cdots x_n)^d] \sim 0_E$ は

$$[u/(x_1 \cdots x_n)^d] \sim 0_E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \in (x_1^d, \cdots, x_n^d)$$

として定まります. E 上の Frobenius 射 $F_E : E \to E$ を $F_E(w) := [u^p/(x_1 \cdots x_n)^{pd}]$ として定めたとき f と自然数 r, e に対して $Z_{r,e}$ を

$$Z_{r,e} := \ker f^r F_E^e = \{w \in E | f^r F_E^e(w) = 0_E\}$$

として定義しておきます.

定義 3.1 (test イデアル)**.** f と実数 $t > 0$ に対する test イデアル $\tau(f^t)$ を次のように定める.

$$\tau(f^t) := \mathrm{Ann}_R(\bigcap_{e \geq 1} Z_{\lceil tp^e \rceil, e}).$$

ただし式の $\lceil tp^e \rceil$ は切り上げと呼び

$$tp^e \leq \lceil tp^e \rceil < tp^e + 1$$

となる整数のことである.

test イデアルも次の基本的な性質を確かめることができます.

- $f = ag$ ならば $\tau(f^t) \subseteq \tau(g^t)$ となる.
- 逆に $t \leq t'$ ならば $\tau(f^{t'}) \subseteq \tau(f^t)$ となる.

この test イデアルと F-thresholds は次の補題を足掛かりにつながりを持ちます.

補題 3.2 ([MTW]lemma.2.4). 前節の f, J に対して E の部分加群 M を $J = \mathrm{Ann}_R M$ となるようにとってくると $\nu_f^J(p^e)$ は $M \not\subseteq Z_{r,e}$ となる最大の r となる.

test イデアルの性質と上の補題から次の定理を得ることができます.

定理 3.3 ([MTW]proposition.2.7). f の F-thresholds と test イデアルの間にはそれぞれ $J \longmapsto c^J(f), c \longmapsto \tau(f^c)$ なる対応により全単射がある.

この結果から f の F-thresholds と test イデアルの間に次の関係があることがわかります.

$$c_0 := c^{\mathfrak{m}}(f) < c_1 < \cdots < c_i < c_{i+1} < \cdots$$

を f の F-thresholds を順に並べた列とすると

$$\tau(f^c) = \tau(f^{c_i}), \quad c \in [c_i, c_{i+1})$$

が成立します. 即ち F-thresholds は test イデアルを JUMP させる境界であると特徴づけられます.

さて, はじめに F-thresholds のことを標数 0 の体上の特異点論との対応を与える試みのひとつとして挙げましたが, JUMP という特徴づけができたところで F-thresholds は何に対応しているのか, そしてどのようにして違う標数のものを対応させるのか次節で見ていきたいと思います.

4 標数 p への還元

A を $\mathbb{Z}$ の 0 でない元で局所化したものとして $0 \neq f \in A[X] := A[X_1, \cdots, X_n]$ をとってきます. $f_{\mathbb{Q}} := f\mathbb{Q}[X]$ の原点の周りでの乗法イデアルの jumping coefficients と標数 p に還元して原点で局所化したものである $f_p := f\mathbb{F}_p[X]_{(X_1,\cdots,X_n)}$ の F-threshold と比較していきたいと思います. ここでは p をいろいろ動かしますが, 十分大きな p を考えるので A を必要に応じてさらに元で局所化することは自由にできるものとします.

$\mathbb{Q}$ 上の $f_{\mathbb{Q}}$ の log resolution $\pi_{\mathbb{Q}} : Y_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ とは $\pi_{\mathbb{Q}}$ が固有な双有理射で $Y_{\mathbb{Q}}$ は滑らかで $\pi_{\mathbb{Q}}^{-1}(f_{\mathbb{Q}})$ と $\pi_{\mathbb{Q}}$ の例外因子が定めるイデアルの積は principal でありそれが定める因子は単純正規交差であるものをいいます. このような解消は廣中の特異点解消定理より保証されています. A をさらに元で局所化することで $\pi_{\mathbb{Q}}$ は A 上の f の log resolution $\pi : Y \to \mathbb{A}^n_A$ の係数を拡大しただけの物と見ることができます.

log resolition を定義したところで f と t の乗法イデアル $\mathcal{I}(f^t)$ が定義できます.

定義 4.1 (乗法イデアル). *D を $\pi^{-1}(f)$ により定まる有効因子, K を π の双対標準因子とする. このとき全ての実数 $t > 0$ に対して*

$$\mathcal{I}(f^t) := H^0(Y, \mathcal{O}_Y(K - \lfloor tD \rfloor)). \qquad (*)$$

ここで実数 t に対して $\lfloor t \rfloor$ を切り下げと呼び $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t$ を満たす整数のことを指す, $\lfloor tD \rfloor$ は例えば Weil 因子 $D = \sum a_i Y_i$ なら $\lfloor tD \rfloor = \sum \lfloor ta_i \rfloor Y_i$ と定める.

$\mathcal{I}(f^t)_{\mathbb{Q}}$ を $f_{\mathbb{Q}}$ と t の乗法イデアルとする.

この乗法イデアルから jumping coefficients を次の形で定義します.[MTW]

$$\lambda_0^J(f) := \min\{t > 0 | \text{原点付近で } \mathcal{I}(f^t)_{\mathbb{Q}} \subseteq J_{\mathbb{Q}}\}.$$

jumping coefficients はその名の通り乗法イデアルを JUMP させる境界となります.

p を十分大きくとると上の log resolution は $\mathbb{F}_p$ 上定義された π_p の log resolution を誘導できます. そして $\mathcal{I}(f_p^t)$ を $(*)$ と同じように π_p を使って定義すると, t を固定したとき十分大きな p ならば $\mathcal{I}(f^t)_p = \mathcal{I}(f_p^t)$ となります.

このように乗法イデアルを標数 p に還元させることで, test イデアルと比較することができます.

定理 4.2 ([MTW]theorem.3.2). *t を任意にとる. このとき t に依った十分大きな p で $\tau(f_p^t) = \mathcal{I}(f_p^t)$ が成立する.*

この定理と前節の F-thresholds と test イデアルの関係から f の乗法イデアルの jumping coefficients と F-thresholds の間に次の対応があることがわかります.

定理 4.3 ([MTW]theorem.3.4). *イデアル $J \subseteq A[X]$ を与えたとき*

$$\lim_{p \mapsto \infty} c^J(f_p) = \lambda_0^J(f)$$

が成立する.

p を大きくしていったときの F-thresholds の極限は jumping coefficients となることがわかりました. [MTW] では次の予想がたてられています.

予想 4.4. 無限に多くの p で $c^J(f_p) = \lambda_0^J(f)$ とできるか.

この予想はもう少し具体的な形で定式化されていますが, 私は [MTW] で挙げられたこの類の予想の解決 (成立条件を見つける部分的解決も含め) を目指しています.

参考文献

[HH] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure, invariant theory and the Briançon-Skoda theorem.* , J. Amer. Math. Soc. **3**. (1990) No.1. 31–116

[HY] N. Hara and K. Yoshida, *A genelization of tight closure and multiplier ideals.* , Trans. Amer. Math. Soc. **355**. (2003) 3143–3174

[MTW] M. Mustaţă, S. Takagi and K. Watanabe, *F-thresholds and Bernstein-Sato polynomials.* , Proceedings of the 4th ECM, Stockolm, 2004 341–364