

量子群における結晶基底の多面体表示

星野 歩*

上智大学大学院 理工学研究科 数学専攻

1 Abstract and Introduction

The quantum algebra $U_q(\mathfrak{g}) := \langle e_i, f_i, q^h \rangle_{i \in I}$ ($I = \{1, 2, \dots, n\}$) which was introduced in the study of solvable lattice models is applied to the reserches of mathematical physics and plays important roles. The nilpotent part $U_q^-(\mathfrak{g}) := \langle f_i \rangle_{i \in I}$ of $U_q(\mathfrak{g})$ has a crystal base $B(\infty)$ and the irreducible integrable highest weight representaion of $U_q(\mathfrak{g})$ also has crystal base $B(\lambda)$ which were constructed by Kashiwara [K1].

The crystal base has been realized by several methods but it is not so easy to obtain the explicit form. Polyhedral realization of crystal bases is one of the methods for realizing crystal bases explicitly, which was introduced by Nakashima and Zelevinsky [NZ]. We can describe a vector in the crystal base $B(\infty)$ as a lattice point of certain convex polyhedron in an infinite \mathbb{Z} -lattice by this method. This method can be applied to the crystal base $B(\lambda)$ of the irreducible integrable highest weight module for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras.

In this paper, we introduce the notion of the polyhedral realization and recent results.

2 準備

まず基本事項の復習をする. 量子群 $U_q(\mathfrak{g}) := \langle e_i, f_i, q^h \rangle_{i \in I} / \mathbb{Q}(q)$ は Kac-Moody Lie 代数 \mathfrak{g} の universal enveloping algebra の q -analogue ($U(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow U_q(\mathfrak{g})$) で $q \rightarrow 1$ の極限で Kac-Moody Lie 代数が復元される. 量子群の表現論 (可積分表現, 最高ウェイト表現) は q が generic の場合 Kac-Moody Lie 代数の表現論と同じ (特に, 有限次元 Kac-Moody Lie 代数に付随する量子群の有限次元表現は $L(\lambda)$: Verma module の simple quotient (λ : dominant integral weight) と同型) であるが, 違いの一つに結晶基底の存在がある. 結晶基底とは, $q \rightarrow 0$ の極限において部分代数 $U_q^-(\mathfrak{g})$ と 可積分最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ に存在する性質の良い基底であり, 柏原によって構成された. この基底はある操作によって一般の q についての基底 (global base) に持ち上がり, 特に $q \rightarrow 1$ の基底としても新しい.

3 結晶基底 (crystal base)

ここでは簡単に結晶基底の定義と性質を復習する. M を $U_q(\mathfrak{g})$ の可積分表現とする. 任意の $u \in M_\lambda$ ($\lambda \in P$) は $u_n \in \ker e_i \cap M_{\lambda+n\alpha_i}$ に対して $u = \sum_{n \geq 0} f_i^{(n)} u_n$ ($f_i^{(n)} := \frac{f_i^n}{[n]_i!}$, $[n]_i := \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}$, $q_i := q^{(\alpha_i, \alpha_i)}$) という表示を持つ. このとき柏原作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i \in \text{End}(M)$ ($i \in I$) を以下で定義する:

$$\tilde{e}_i u := \sum_{n \geq 1} f_i^{(n-1)} u_n, \quad \tilde{f}_i u := \sum_{n \geq 0} f_i^{(n+1)} u_n.$$

以下 $A := \{ f(q) \in \mathbb{Q}(q) : f(q) \text{ は } q = 0 \text{ で正則} \}$ とする.

*e-mail address: a-hoshin@mm.sophia.ac.jp

本研究は日本学術振興会 特別研究員奨励費の助成を受けています

Definition 8 (クリスタル). 集合 B がクリスタルとは $i \in I$ に対して

$$\begin{aligned} wt : B &\longrightarrow P, \\ \varepsilon_i : B &\longrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \quad \varphi_i : B \longrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \\ \tilde{e}_i : B \sqcup \{0\} &\longrightarrow B \sqcup \{0\}, \quad \tilde{f}_i : B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\}, \\ \tilde{e}_i(0) = \tilde{f}_i(0) &= 0 \end{aligned}$$

という写像があって、以下の性質を満たすことである：

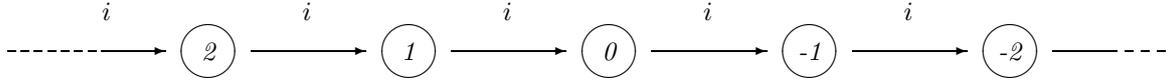
$$\begin{aligned} \varphi_i(b) &= \varepsilon_i(b) + \langle h_i, wt(b) \rangle, \\ wt(\tilde{e}_i b) &= wt(b) + \alpha_i \quad \text{if } \tilde{e}_i b \in B, \\ wt(\tilde{f}_i b) &= wt(b) - \alpha_i \quad \text{if } \tilde{f}_i b \in B, \\ \tilde{e}_i b_2 = b_1 &\iff \tilde{f}_i b_1 = b_2 \quad (b_1, b_2 \in B), \\ \varepsilon_i(b) = -\infty &\implies \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0. \end{aligned}$$

Remark 9. 結晶基底はクリスタルの性質を満たす。

Example 10. $i \in I$ に対して、 $B_i := \{(x)_i : x \in \mathbb{Z}\}$ を以下のように定義すると B_i はクリスタルである：

$$\begin{aligned} wt((x)_i) &= x\alpha_i, \quad \tilde{e}_j(x)_i = \delta_{i,j}(x+1)_i, \quad \tilde{f}_j(x)_i = \delta_{i,j}(x-1)_i, \\ \varepsilon_i((x)_i) &= -x, \quad \varphi_i((x)_i) = x, \quad \varepsilon_j((x)_i) = -\infty \quad \varphi_j((x)_i) = -\infty \quad \text{for } j \neq i. \end{aligned}$$

このとき B_i のクリスタルグラフは以下ようになる：



ただし、 $\tilde{f}_i \circlearrowleft t = \circlearrowleft (t-1)$ ($t \in \mathbb{Z}$). ここに B_i と \mathbb{Z} は集合としては等しい。

Example 11. $R_\lambda := \{r_\lambda\}$ ($\lambda \in P$) を一元からなる集合で $wt(r_\lambda) := \lambda$, $\varepsilon_i(r_\lambda) := -\langle h_i, \lambda \rangle$, $\varphi_i(r_\lambda) := 0$, $\tilde{e}_i(r_\lambda) = \tilde{f}_i(r_\lambda) := 0$ と定めると R_λ はクリスタルである。

Example 12. $index$ の無限列 $\iota = (\dots, i_2, i_1)$ が次の条件 (A) を満たすとする：

$$(A) \quad i_k \neq i_{k+1} \quad \text{and} \quad \#\{k \mid i_k = i\} = \infty \quad \text{for any } i \in I.$$

このとき

$$\mathbb{Z}^\infty := \{(\dots, x_2, x_1) : x_j \in \mathbb{Z}, x_k = 0 \ (k \gg 0)\} \quad (\mathbb{C} \cdots \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1})$$

は ι に付随したクリスタルの構造を持つ (詳細は略). さらに

$$\mathbb{Z}^\infty[\lambda] := \{(\dots, x_2, x_1, r_\lambda) : x_j \in \mathbb{Z}, x_k = 0 \ (k \gg 0)\} = \mathbb{Z}^\infty \otimes R_\lambda \quad (\mathbb{C} \cdots \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1} \otimes R_\lambda)$$

も ι に付随したクリスタルの構造を持つ. 集合としては \mathbb{Z}^∞ と $\mathbb{Z}^\infty[\lambda]$ は等しいが、そのクリスタルの構造は異なることに注意する。

4 結晶基底の実現と例

[KN] において柏原、中島は A_n, B_n, C_n, D_n 型の可積分最高ウェイト表現の結晶基底 $B(\lambda)$ の semi standard tableaux による実現を与えた. ここでは A_n 型について詳細を述べる. $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i \Lambda_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Λ_i : fundamental weights, $i \in I$) とすると $B(\lambda)$ は shape が (m_1, m_2, \dots, m_n) ($m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$) で entry が $1, 2, \dots, n+1$ の semistandard tableaux の集合で、次の条件を満たすものと等しい: $m_1 - m_2 = \lambda_1, m_2 - m_3 = \lambda_2, \dots, m_{n-1} - m_n = \lambda_{n-1}, m_n = \lambda_n$.

Example 13 (A_2 -case). $\lambda = 2\Lambda_1 + \Lambda_2$ とすると $B(\lambda)$ は以下で与えられる :

$$B(\lambda) = \left\{ \begin{array}{ccccc} \begin{array}{|c|} \hline 111 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 112 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 113 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 122 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 123 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{|c|} \hline 133 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 111 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 112 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 113 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 122 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{|c|} \hline 123 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 133 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 222 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 223 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|} \hline 233 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \end{array} \right\}$$

- Tableau どうしのテンソル積も具体的に記述できるので Littlewood-Richardson rule も記述できる ([N1]).

5 結晶基底の多面体表示

結晶基底の多面体表示とはある区分線形変換で不変な一次不等式系で定められた領域の、整数点として結晶基底を具体的に表示する手法で 1997 年に中島と Zelevinsky [NZ] によって導入された、一般の Kac-Moody 型の量子群に適応できる手法である。

Known results

- $B(\infty)$: 古典 A_n 型、アフィン $A_{n-1}^{(1)}$ 型、rank 2 一般 (中島, Zelevinsky [NZ] 1997)
- $B(\lambda)$: 古典 A_n 型、アフィン $A_{n-1}^{(1)}$ 型、rank 2 一般 (中島 [N2] 1999)

New results

- $B(\infty), B(\lambda)$: 例外型を含む半単純型 ($B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ [H1] 2005)
- 変形量子群の多面体表示 : 古典 A_n 型、rank 2 一般 (ウェイトに条件あり [HN] 2005, [H2] to appear)

• $B(\infty)$ の多面体表示

ここでは、 $B(\infty)$ の多面体表示の背景と構成法を紹介する。まず、クリスタル $B_i := \{ (x)_i \mid x \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z} (i \in I)$ に対して以下の埋め込みの存在が知られている :

$$\Psi_i : B(\infty) \hookrightarrow B(\infty) \otimes B_i \quad u_\infty \mapsto u_\infty \otimes (0)_i.$$

ここで先の条件 (A) を満たす index の無限列 $\iota = (\dots, i_2, i_1) (i_k \in I)$ をとり Ψ_i を ι に沿って繰り返し作用させると以下の埋め込みを得る (柏原の埋め込み [K3]) :

$$\begin{aligned} \Psi_\iota : B(\infty) &\hookrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_1} \hookrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow B(\infty) \otimes \dots \otimes B_{i_l} \otimes \dots \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1} \cong \mathbb{Z}^\infty \\ &(u_\infty \mapsto (\dots, 0, 0), \mathbb{Z}^\infty := \{ (\dots, x_2, x_1) \mid x_j \in \mathbb{Z}, x_k = 0 (k \gg 0) \}). \end{aligned}$$

- 多面体表示とは Image Ψ_ι を具体的に記述する手法の一つである。

Example 14 (A_3 -case). $\iota := (\dots, 3, 2, 1, 3, 2, 1)$ とすると

$$Im(\Psi_\iota) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \\ \vec{x} \in \mathbb{Z}^\infty \mid x_2 \geq x_4 \geq 0, \\ x_3 \geq x_5 \geq x_7 \geq 0, \text{ その他の } x_j \equiv 0 \end{array} \right\}.$$

ここでは柏原の埋め込みの像 $Im\Psi_\iota (\cong B(\infty))$ を記述するために $B(\infty)$ の多面体表示を構成する ([NZ]). 条件 (A) を満たす index の無限列 $\iota := (\dots, i_k, \dots, i_2, i_1)$ を固定し、 $k \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} k^{(+)} &:= \min \{ j \mid i_k = i_j (k < j) \}, \\ k^{(-)} &:= \max \{ j \mid i_k = i_j (k > j) \} \text{ (ただし } k^{(-)} \text{ が存在しない場合は } k^{(-)} = 0 \text{)} \end{aligned}$$

とおく。 \mathbb{Q} -ベクトル空間 \mathbb{Q}^∞ を以下で定める :

$$\mathbb{Q}^\infty := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^\infty = \{ \vec{x} = (\dots, x_2, x_1) \mid x_j \in \mathbb{Q}, x_k = 0 (k \gg 0) \}.$$

また \mathbb{Q}^∞ 上の一次形式 $\beta_k(\vec{x})$ ($\vec{x} \in \mathbb{Q}^\infty$) を以下で定める :

$$\beta_k(\vec{x}) = x_k + \sum_{k < j < k^{(+)}} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j} \rangle x_j + x_{k^{(+)}}.$$

この $\beta_k(\vec{x})$ を用いて $\varphi(\vec{x}) = \sum_{k \geq 1} \varphi_k x_k$ ($\varphi_k \in \mathbb{Q}$) に対する区分線型作用素 S_k を以下で定める :

$$S_k(\varphi) := \begin{cases} \varphi - \varphi_k \beta_k & \text{if } \varphi_k > 0, \\ \varphi - \varphi_k \beta_{k^{(-)}} & \text{if } \varphi_k \leq 0. \end{cases}$$

Example 15 (A_3 -case). $\iota := (\dots, 3, 2, 1, 3, 2, 1)$, $\varphi = x_1$ とすると

$$\begin{aligned} S_1(x_1) &= x_1 - \beta_1(\vec{x}) = x_1 - (x_1 - x_2 + x_4) = x_2 - x_4, \\ S_2 S_1(x_1) &= x_2 - x_4 - \beta_2(\vec{x}) = x_2 - x_4 - (x_2 - x_3 - x_4 + x_5) = x_3 - x_5, \\ S_3 S_2 S_1(x_1) &= x_3 - x_5 - \beta_3(\vec{x}) = x_3 - x_5 - (x_3 - x_5 + x_6) = -x_6. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \Xi_\iota &:= \{ S_{j_l} \cdots S_{j_1}(x_{j_0}) \mid l \geq 0, j_0, \dots, j_l \geq 1 \}, \\ \Sigma_\iota &:= \{ \vec{x} \in \mathbb{Z}^\infty (\subset \mathbb{Q}^\infty) \mid \varphi(\vec{x}) \geq 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota \} \end{aligned}$$

と定める. また index の無限列 ι に対し

$$\iota^{(j)} := \min\{ k \mid i_k = j \} \quad (j \in I)$$

と定め ι に対し以下のような仮定 (P) を課す :

$$(P) \quad \varphi_{\iota^{(j)}} \geq 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota.$$

このとき、以下の定理が成立する :

Theorem 16 ([NZ]). ι は条件 (A), (P) を満たすとする. このとき

$$\text{Im}(\Psi_\iota) (\cong B(\infty)) = \Sigma_\iota.$$

この Σ_ι を ι に付随する $B(\infty)$ の多面体表示と呼ぶ.

Remark 17. Theorem 16 より、 $B(\infty)$ の具体形を求めるには Ξ_ι, Σ_ι の具体形を求めればよいことが分かる.

Remark 18. 多面体表示において恒等的に 0 でない x_j の個数、つまり $B(\infty)$ を記述するために必要な、柏原の埋め込みで用いたクリスタル B_i のテンソル積の個数は、付随する Weyl 群の最長元の長さに等しいことが分かっている. アフィン型や一般の Kac-Moody 型の場合、無限個のテンソル積が必要になる.

以下 \mathfrak{g} を単純型とする. $\iota := (\dots, n, \dots, 2, 1, \dots, n, \dots, 2, 1)$ (n : カルタン行列のサイズ) と定め、この ι に対し $\vec{x} \in \mathbb{Z}^\infty$ の index を $x_{j;i} := x_{(j-1)n+i}$ の対応で次のように付けかえる :

$$\vec{x} := (\dots, x_{j;i}, \dots, x_{2;2}, x_{2;1}, x_{1;n}, \dots, x_{1;2}, x_{1;1}) \in \mathbb{Z}_\iota[\lambda], \text{ ただし } i \notin [1, n] \text{ のときは } x_{j;i} = 0.$$

ここでは B_n 型の場合の結果を紹介する.

Theorem 19 (B_n -case). $B(\infty)$ の多面体表示は以下である :

$$\begin{aligned} x_{j;i} &= 0 \quad \text{for } j, i \notin [1, n], \\ x_{1;i} &\geq x_{2;i-1} \geq \dots \geq x_{i;1} \geq 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n-1, \\ x_{j;n} &\geq x_{j+1;n-1} \geq \dots \geq x_{n;j} \geq 0 \quad \text{for } 1 \leq j \leq n, \\ x_{j;n-j+1} &\geq x_{j;n-j+2} \geq \dots \geq x_{j;n} \geq 0 \quad \text{for } 2 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

• $B(\lambda)$ の多面体表示

ここでは $B(\lambda)$ の多面体表示の背景と構成法を紹介する. $B(\lambda)$ の単位元を u_λ とする. 一元からなるクリスタル $R_\lambda := \{r_\lambda\}$ に対して以下の埋め込みを得る:

$$\Omega_\lambda : B(\lambda) \hookrightarrow B(\infty) \otimes R_\lambda \quad u_\lambda \mapsto u_\infty \otimes r_\lambda.$$

この埋め込み Ω_λ と柏原の埋め込み Ψ_ι を合成し以下の unique な埋め込みを得る:

$$\begin{aligned} \Psi_\iota^\lambda : B(\lambda) &\hookrightarrow B(\infty) \otimes R_\lambda \hookrightarrow \mathbb{Z}^\infty \otimes R_\lambda (=:\mathbb{Z}^\infty[\lambda]) \\ u_\lambda &\mapsto u_\infty \otimes r_\lambda \mapsto (\cdots, 0, 0) \otimes r_\lambda. \end{aligned}$$

ここではクリスタルの埋め込みの像 $Im\Psi_\iota^\lambda (\cong B(\lambda))$ を記述するために $B(\lambda)$ の多面体表示を構成する ([N2]). 条件 (A) を満たす index の無限列 $\iota := (\cdots, i_k, \cdots, i_2, i_1)$ を固定し $k^{(+)}, k^{(-)}, \mathbb{Q}^\infty$ は前出のものとする. \mathbb{Q}^∞ 上の線型関数 $\beta_k^{(\pm)}(\vec{x})$ ($\vec{x} \in \mathbb{Q}^\infty$) を以下で定める:

$$\begin{aligned} \beta_k^{(+)}(\vec{x}) &= x_k + \sum_{k < j < k^{(+)}} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j} \rangle x_j + x_{k^{(+)}}, \\ \beta_k^{(-)}(\vec{x}) &= \begin{cases} x_{k^{(-)}} + \sum_{k^{(-)} < j < k} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j} \rangle x_j + x_k & \text{if } k^{(-)} > 0, \\ -\langle h_{i_k}, \lambda \rangle + \sum_{1 \leq j < k} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j} \rangle x_j + x_k & \text{if } k^{(-)} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで次に注意する:

$$\beta_k^{(+)} = \beta_k, \quad \beta_k^{(-)} = \beta_{k^{(-)}} \quad \text{if } k^{(-)} > 0 \quad (5.1)$$

この $\beta_k^{(\pm)}(\vec{x})$ を用いて $\varphi(\vec{x}) = c + \sum_{k \geq 1} \varphi_k x_k$ ($c, \varphi_k \in \mathbb{Q}$) に対する区分線型作用素 S'_k を以下で定める:

$$S'_k(\varphi) := \begin{cases} \varphi - \varphi_k \beta_k^{(+)} & \text{if } \varphi_k > 0, \\ \varphi - \varphi_k \beta_k^{(-)} & \text{if } \varphi_k \leq 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

ここで index の無限列 ι に対し

$$\begin{aligned} \iota^{(j)} &:= \min \{ k \mid i_k = j \ (j \in I) \}, \\ \lambda^{(j)}(\vec{x}) &:= \langle h_{i_k}, \lambda \rangle - \sum_{1 \leq l < \iota^{(j)}} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_l} \rangle x_l + x_{\iota^{(j)}} \end{aligned}$$

と定め

$$\begin{aligned} \Xi'_\iota &:= \{ S'_{j_k} \cdots S'_{j_1} \lambda^{(m)}(\vec{x}) \mid m \in I, j_1, \cdots, j_k \geq 1 \}, \\ \Xi_\iota[\lambda] &:= \Xi'_\iota \cup \Xi'_\iota \\ &= \{ S'_{j_l} \cdots S'_{j_1} (x_{j_0}) \mid l \geq 0, j_0, \cdots, j_l \geq 1 \} \cup \{ S'_{j_k} \cdots S'_{j_1} \lambda^{(m)}(\vec{x}) \mid m \in I, j_1, \cdots, j_k \geq 1 \}, \\ \Sigma_\iota[\lambda] &:= \{ \vec{x} \in \mathbb{Z}_\iota[\lambda] \mid \varphi(\vec{x}) \geq 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota[\lambda] \} \end{aligned}$$

と定める. ここで (5.1), (5.2) により, 条件 (P) を満たす ι に対しては Ξ_ι は $B(\infty)$ の多面体表示で定めたものと等しいことに注意する. このとき以下の定理が成立する:

Theorem 20 ([N2]). $(\cdots, 0, 0) \in \Sigma_\iota[\lambda]$ であるとする. このとき

$$Im(\Psi_\iota^\lambda) (\cong B(\lambda)) = \Sigma_\iota[\lambda].$$

この $\Sigma_\iota[\lambda]$ を ι に付随する $B(\lambda)$ の多面体表示と呼ぶ.

Remark 21. Theorem 20 より $B(\lambda)$ の具体形を求めるには $\Xi_\iota[\lambda], \Sigma_\iota[\lambda]$ の具体形を求めればよいことが分かる.

以下 \mathfrak{g} を単純型とする. ι, \vec{x} は前出のものと同様のものとする. ここで

$$\begin{aligned}\Xi'_\iota &:= \{S'_{j_k} \cdots S'_{j_1} \lambda^{(m)}(\vec{x}) \mid m \in I, j_1, \dots, j_k \geq 1\}, \\ \Xi_\iota[\lambda] &:= \Xi_\iota \cup \Xi'_\iota \\ &= \{S'_{j_k} \cdots S'_{j_1} (x_{k;1}) \mid k \geq 1, j_1, \dots, j_k \geq 1\} \cup \{S'_{j_k} \cdots S'_{j_1} \lambda^{(m)}(\vec{x}) \mid m \in I, j_1, \dots, j_k \geq 1\}, \\ \Sigma_\iota[\lambda] &:= \{\vec{x} \in \mathbb{Z}_\iota[\lambda] \mid \varphi(\vec{x}) \geq 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota[\lambda]\}\end{aligned}$$

と定めると $\Sigma_\iota[\lambda]$ は $B(\lambda)$ の多面体表示となる.

ここでは B_n 型の場合の結果を紹介する. 整数列 $\mu := (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l, 0, 0, \dots)$ ($l \geq 1, \mu_i \in \mathbb{Z}$) に対し, μ が *admissible pattern* であるとは以下を満たすことである:

$$\mu : \text{admissible} \iff \begin{cases} 1 \leq \mu_1 \leq n, \\ 0 \leq \mu_k \leq \mu_{k-1} - 1 \quad \text{for } 2 \leq k \leq l. \end{cases}$$

また簡単のため次の記号を準備する:

$$X_{j;i} := \begin{cases} 2x_{j;i} & \text{if } i \neq n, \\ x_{j;n} & \text{if } i = n. \end{cases}$$

Theorem 22 (B_n -case). $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i \Lambda_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とする. このとき $B(\lambda)$ の多面体表示は以下である:

$$\begin{aligned}x_{j;i} &= 0 \quad \text{for } j, i \notin [1, n], \\ x_{1;i} &\geq x_{2;i-1} \geq \cdots \geq x_{i;1} \geq 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n-1, \\ x_{j;n} &\geq x_{j+1;n-1} \geq \cdots \geq x_{n;j} \geq 0 \quad \text{for } 1 \leq j \leq n, \\ x_{j;n-j+1} &\geq x_{j;n-j+2} \geq \cdots \geq x_{j;n} \geq 0 \quad \text{for } 1 \leq j \leq n\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}\lambda_i + x_{j;i-j} - x_{j;i+1-j} &\geq 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq i, \\ \lambda_n + \sum_{k=1}^l (X_{k-1+\mu_k; n-\mu_k} - X_{k-1+\mu_k; n+1-\mu_k}) &\geq 0\end{aligned}$$

ただし, $\mu := (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l, 0, 0, \dots)$ とし, それぞれの $l = 1, 2, \dots, n$ に対し $\mu : \text{admissible}$.

6 応用

Littlewood-Richardson rule

可積分表現のテンソル積は, 既約な表現達の直和と同型になることが知られている. その既約成分の重複度を Littlewood-Richardson number という ($c_{\lambda\nu}^\mu : V(\lambda) \otimes V(\nu)$ の直和成分 $V(\mu)$ の重複度). ここで dominant integral weight λ に対し

- $V(\lambda)_\beta : V(\lambda)$ のウェイト β のウェイト空間,
 - $\nu := \sum_{i=1}^n n_i \Lambda_i$ (Λ : 基本ウェイト, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i \in I$),
 - $V(\lambda)_{\beta, \nu} := \{v \in V(\lambda)_\beta : e_i^{n_i+1} v = 0 \text{ for any } i \in I\}$
- とする. このとき次が知られている:

Fact 23.

$$c_{\lambda\nu}^\mu = \dim V(\lambda)_{\mu-\nu, \nu}.$$

また, global base の性質として次が知られている:

Proposition 24 (柏原). 任意の $i \in I$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\{v \in V(\lambda) : e_i^{n+1}v = 0\} = \mathbb{Q}(q) \otimes G(\{b \in B(\lambda) : \tilde{e}_i^{n+1}b = 0\}).$$

よって上記の2つの事実から、 $c_{\lambda\nu}^\mu$ は $\nu := \sum_{i=1}^n n_i \Lambda_i$ に対し

1. ウェイトが $\mu - \nu$, 2. $\varepsilon_i(b) \leq n_i$ for any $i \in I$

の条件を満たす $b \in B(\lambda)$ の個数で与えられる.

実際 1, 2 は容易に多面体表示に組み込むことができる. 不等式系で定められた領域の整数点の個数を数えることによる $c_{\lambda\nu}^\mu$ の記述法は、 A_n 型については Gelfand, Zelevinsky [GZ] が、また B_n, C_n, D_n 型は Berenstein, Zelevinsky [BZ] が得ているが、多面体表示を用いると例外型を含む半単純型の Littlewood-Richardson number が記述できることになる. 今後の課題としてはアフィン型の多面体表示を求めることや、レベル 0 の変形量子群の結晶基底の多面体表示を求めることなどが挙げられる.

Reference

- [BZ] A. Berenstein, A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, *Invent. Math.*, **143** (2001), 77–128.
- [GZ] I. M. Gelfand and A. Zelevinsky, Multiplicities and regular bases for gl_n , *Group Theoretical Methods in Physics*, vol. II, Science Press, Utrecht, 1986, 147–159.
- [H1] A. Hoshino, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Quantum Algebras of Finite Types, to appear *J. Math. Phys.*
- [H2] A. Hoshino, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Modified Quantum Algebras of Rank 2, to appear *Comm. Algebra*.
- [HN] A. Hoshino, T. Nakashima, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Modified Quantum Algebras of Type A, *Comm. Algebra*, **33** (2005), no.7, 2167–2191.
- [K1] M. Kashiwara, On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.*, **63** (1991), 465–516.
- [K2] M. Kashiwara, Global crystal bases of quantum groups, *Duke Math. J.*, **69** (1993), 455–485.
- [K3] M. Kashiwara, Crystal base and Littelmann’s refined Demazure character formula, *Duke Math. J.*, **71** (1993), 839–858.
- [KN] M. Kashiwara and T. Nakashima, Crystal graph for representations of the q -analogue of classical Lie algebras, *J. Algebra*, **165** (1994), 295–345.
- [N1] T. Nakashima, Crystal bases and a generalization of the Littlewood-Richardson rule for the classical Lie algebras, *Comm. Math. Phys.*, **154** (1993), 215–243.
- [N2] T. Nakashima, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Integrable Highest Weight Modules, *J. Algebra* **219**, (1999), 571–597.
- [NZ] T. Nakashima, A. Zelevinsky, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Quantized Kac-Moody Algebras, *Advances in Mathematics* **131**, No.1, (1997), 253–278.