

# 研究内容・成果，及び，2006年度研究活動報告

北海道大学大学院理学研究院 学術研究員 (COE) 島倉裕樹

## 1 研究内容・成果

頂点作用素代数の自己同型群として散在型有限単純群などの興味深い有限群を捉え，対称性を研究し，理解することを目的としている．特に，頂点作用素代数と離散的な対象物である格子，符号，グラフ等との関連を利用して効率的に研究を進めている．今年度は次の3つのテーマに対して研究を行った．

### 1.1 単純カレント拡大における自己同型の持ち上げについて

既知の頂点作用素代数から新しい頂点作用素代数を得る典型的な方法として単純カレント拡大がある．これは頂点作用素代数に単純カレントと呼ばれる性質の良い加群を加えて，その上に頂点作用素代数構造を入れるものがある．例えば有名なムーンシャイン頂点作用素代数  $V^{\natural}$  もリーチ格子  $\Lambda$  に付随する頂点作用素代数  $V_{\Lambda}^{+}$  の単純カレント拡大として構成されている．こうして得られた頂点作用素代数は非常に大きい対称性を持つ可能性を秘めており，自己同型群の研究対象として重要である．

筆者は単純カレント拡大の自己同型群の中で，元の頂点作用素代数の自己同型から誘導される部分群はどのようなものかを完全に記述した．さらなる一般化として，元の頂点作用素代数の自己同型から誘導される単純カレント拡大の間の同型写像の構成も行った．

この結果の応用として次の二つの結果を得た．一つは頂点作用素代数  $V_{\sqrt{2}E_8}^{+}$  と  $V_{\Lambda_{16}}^{+}$  の単純カレント拡大の同型類を完全に決定である．ただし  $\sqrt{2}E_8$  は  $E_8$  型のルート格子のノルムを  $\sqrt{2}$  倍して得られる格子であり， $\Lambda_{16}$  は階数が16のBarnes-Wall格子である．これら頂点作用素代数は直交群に付随する大きな自己同型群を持つことが示されており，その対称性を用い問題を解決した．もう一つはモンスターにおける基本可換2-群の正規化群の記述である． $V^{\natural}$  を  $V_L^{+}$  の単純カレント拡大として記述して， $V_L^{+}$  の自己同型を用いて基本可換2-群の正規化群の記述を行った．特に7つの極大2-局所部分群のうち5つはこの方法で記述される．そして，このようにして得られたいくつかの群がモンスターアマルガムを成す事を，これらの記述を用いて行った．このことから  $V^{\natural}$  にグライスが構成した可換代数が含まれていることを用いずにモンスターが作用することがわかる．

これらの研究成果は論文 (1) で発表されている．

### 1.2 グライス代数と有限可換自己同型群に付随するグラフ

頂点作用素代数がCFT型であり，次数1の空間が0である場合に，次数2の空間にグライス代数と呼ばれる可換非結合代数構造を頂点作用素代数の積を用いて入れることができる．ムーンシャイン頂点作用素代数に代表されるように，”良い”有限単純群が全自己同型群としてあわられる場合はこのような構造を持つ場合が多いと考えられており，重要な研究対象である．このグライス代数は有限次元ではあるが，非結合的な代数構造を持つために非常に複雑である．頂点作用素代数の自己同型群はこのグライス代数に作用するのだが，その複雑さゆえにこの作用を用いて自己同型群の構造を決めるのは一般には困難である．

筆者は頂点作用素代数の有限可換自己同型に付随したグラフ構造をグライス代数上に定義し、二つの例に対して Lie 型の有限単純群に付随するグラフが現われることを示した。特に、階数 32 の Barnes-Wall 格子に付随する頂点作用素代数の自己同型群をこのグラフへの作用を用いて決定した。これは頂点作用素代数の自己同型群を決定する新しい手法であり、他の自己同型群の決定への応用が期待される。

これら研究成果は (b) (c) で口頭発表されている。

### 1.3 格子に付随する頂点作用素代数のイジング元の分類

ヴィラソロ代数に付随する頂点作用素代数は典型的な例であり、また性質が良いために研究に良く用いられる。特に、中心電荷  $1/2$  の単純ヴィラソロ頂点作用素代数は表現論を用いた自己同型が定義できることから、自己同型群の研究にも大きな役割を果たす。この頂点作用素代数を生成する元としてイジング元と呼ばれるものがある。この分類は自己同型群の研究に大きな進展をもたらすと同時に、自己同型群をイジング元全体への置換群と見ることによってその構造が見やすくなる等の応用が期待される。一方で、偶格子  $L$  に付随する頂点作用素代数  $V_L^+$  は基本的な頂点作用素代数の例である。この頂点作用素代数に対して、 $L$  がノルム 2 の元を持たない場合にイジング元の分類に対する予想が提出されており、 $L$  の全ての元の内積が偶数となる場合にはこの予想が正しいことが示されている。

筆者は台湾国立成功大学の Lam 氏との共同研究でこの予想がもっと緩い条件で成立することを示した。特に、重要な例であるリーチ格子に対しても正しいことが示された。ムーンシャイン頂点作用素代数はリーチ格子に付随する頂点作用素代数を含むため、この結果を元にムーンシャイン頂点作用素代数のイジング元の分類等の多くの応用が期待される。また、予想の解決への糸口になると期待される。

これら研究成果は (a) で口頭発表されている。

## 2 2006 年度の研究活動報告

### 発表論文

- (1) H. Shimakura, Lifts of automorphisms of vertex operator algebras in simple current extensions, to appear in *Math. Z.*

### 口頭発表

- (a) H. Shimakura, On Ising vectors of VOAs associated with lattices, Mini workshop on Lie algebra and representation theory, National Cheng Kung University, January 2007.
- (b) 島倉裕樹, On graphs associated with the Griess algebras of VOAs, 群論とその周辺, 京都数理解析研究所, December 2006.
- (c) 島倉裕樹, 島倉裕樹, 階数 32 の Barnes-Wall 格子に付随する頂点作用素代数の自己同型群について, 第 18 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, August 2006.

## 発表論文リスト

- H. Shimakura, Lifts of automorphisms of vertex operator algebras in simple current extensions, to appear in *Math. Z.*
- H. Shimakura, The automorphism groups of the vertex operator algebras  $V_L^+$ : general case, *Math. Z.* **252** (2006), 849 - 862.
- H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra  $V_L^+$  for an even lattice  $L$  without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.
- H. Shimakura, Decompositions of the Moonshine module with respect to subVOAs associated to codes over  $\mathbf{Z}_{2k}$ , *J. Algebra* **251** (2002) 308-322.

## 主たる口頭発表のリスト

- H. Shimakura, On Ising vectors of VOAs associated with lattices, Mini workshop on Lie algebra and representation theory, National Cheng Kung University, January 2007.
- 島倉裕樹, On graphs associated with the Griess algebras of VOAs, 群論とその周辺, 京都数理解析研究所, December 2006.
- 島倉裕樹, 島倉裕樹, 階数 32 の Barnes-Wall 格子に付随する頂点作用素代数の自己同型群について, 第 18 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, August 2006.
- H. Shimakura, Graph associated with the Griess algebra and an abelian automorphism group, Finite groups and vertex operator algebra, National Cheng Kung University, February 2006.
- H. Shimakura, Automorphism group of the VOA associated with the Barnes-Wall lattice of rank 32, Vertex algebras in Nara, 奈良女子大, November 2005.
- 島倉裕樹, 頂点作用素代数  $V_L^+$  と構成法 B で得られる偶格子, 代数的組み合わせ論とその周辺, 京都数理解析研究所, October 2005.
- 島倉裕樹, 直交群が作用する VOA の拡大について, 第 17 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, September 2005.
- 島倉裕樹, 頂点作用素代数  $V_L^+$  とモンスターの極大 2-局所部分群について, 代数的組み合わせ論, 京都大学数理解析研究所, December 2004.
- H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra  $V_L^+$  and maximal 2-local subgroups of the Monster, Perspectives arising from vertex algebra theory, Senri Life Science Center, November 2004.
- 島倉裕樹, 構成法 B で得られる偶格子と頂点作用素代数, 第 16 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, August 2004.
- H. Shimakura,  $Y$ -representation and 21-node system of the Monster and the moonshine module, Amalgams for Graphs and Geometries, Oberwolfach, May 2004.
- H. Shimakura, Automorphism group of a vertex operator algebra fixed by an abelian group and its application, The Second East Asian Conference on Algebra and Combinatorics, 九州大学国際研究交流プラザ, November 2003.
- 島倉裕樹, 頂点作用素代数  $V_L^+$  の自己同型群, 第 15 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, July 2003.
- 島倉裕樹, 頂点作用素代数  $V_L^+$  の自己同型群, Lie Theory のひろがりとなつた進展, 京都大学数理解析研究所, July 2003.

- 島倉裕樹, Automorphism group of the vertex operator algebra associated to the Barnes-Wall lattice of rank 16, 日本数学会, 東京大学, March 2003.
- 島倉裕樹, Notes on the McKay-Thompson series for  $2A$ ,  $2B$  and  $4A$ , 第14回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, August 2002.
- 島倉裕樹,  $4A$  元に関する McKay-Thompson 級数の計算, 代数学と計算, 東京都立大学, November 2001.
- 島倉裕樹, Moonshine module and codes over  $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ , 符号・格子・頂点作用素代数と有限群, 京都大学数理解析研究所, February 2001.
- 島倉裕樹, The calculation of the McKay-Thompson series for a  $4A$  element of the Monster based on a new frame, 頂点作用素代数の表現論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, October 2000.