

平成 20 年 3 月 12 日

COE 研究員

佐治健太郎

## 1 研究内容と成果

ユークリッド空間内の曲面は、そのガウス写像の像が一点になる場合平面となり、一次元に退化する場合、直線の 1 パラメーター族すなわち、線織面になる。他の空間でもガウス写像の類似物は双曲空間では双曲的ガウス写像などが研究されており、それが退化する場合、ホロ円の 1 パラメーター族が現れる。これらは平面・球面の持つ性質に近い特別な性質を持った部分多様体を研究する、微分幾何学の立場から重要である。一方、このような対象には一般に特異点が現れる。たとえば、ユークリッド空間内の円の 1 パラメーター族である円織面の場合、塩濱・高木の定理により一方の主曲率が一定である完備な曲面は球と円織面の一種である円管面しかないことが知られている。特に、円管面は臍点を持たない。私は、特異点を持つ場合に、上記のような性質を持った曲面としてローラーコースター曲面というクラスを発見した。この曲面は生成する円上に常に特異点を 2 点持つ。この曲面がカスプ状交叉帽子特異点を持ったとき、その点を通る円上の全ての点は臍点となることを示した。このように、特異点を考えてこれらを研究すると興味深いことがわかる。私は、これまで  $n$ -織写像と呼ばれる  $n$ -平面の 1 パラメーター族や、円織面と呼ばれる半径一定の円の 1 パラメーター族を研究した。他に私が興味を持っている対象としてフロントと呼ばれるものがある。フロントとは特異点を持った曲面で、特異点でも法線ベクトルが定義可能であるもののことを言い、ホイヘンスの原理に由来する。フロントは、ルジャンドル特異点論の枠組みで論じられる。以前、フロントのカスプ辺特異点に対して特異曲率の概念を導入し、その値と特異点のまわりのガウス曲率について調べた。特異曲率が正だとカスプ辺は丸くなり、負だと反り返ることを示し、ガウス・ボンネ型の定理を示した。また、特異点のまわりでのガウス曲率の振る舞いを調べた。本年度の研究により得られた結果は以下の通り:

- ルジャンドル多様体への写像として定式化されていた波面の概念を内在的な概念に定式化し、ピークという非常に弱い条件の特異点のみを許した内在的な波面に対して、重要な特異曲線の上組・下組の概念を発見し、それによりガウス・ボンネの定理を証明した。

- フロントの  $A$  型特異点に関して一般次元で, 使いやすい判定法を作った. それを用いてフロントのジグザグ数の幾何学的性質を明らかにした.
- フロントの特異曲率を様々な対象に対して計算し, いくつかのデータを得た.
- ミンコフスキー空間の擬球面内の曲面に対して泉屋氏によって導入された双対性を研究し, 特異点の特長付けや微分幾何学的性質を調べた.
- 平面写像に余次元 1 で現れる特異点に対して使いやすい判定法を作り, 微分方程式の特異性の研究に応用した.

## 2 発表論文

- [1] K. Saji, *Singularities of non-degenerate 2-ruled hypersurfaces in 4-space*, Hiroshima Math. J. **32** (2002), no. 2, 309–323.
- [2] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Singularities of line congruences*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **133** (2003), no. 6, 1341–1359.
- [3] K. Saji, *Singularities of non-degenerate  $n$ -ruled  $(n+1)$ -manifolds in Euclidean space*, Geometric singularity theory, 211–225, Banach Center Publ., **65**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2004.
- [4] K. Saji, *Bifurcations of Voronoi diagrams and its application to braid theory*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), no. 2, 249–257.
- [5] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. **221** (2005), no. 2, 303–351.
- [6] K. Saji and M. Takahashi, *Singularities of smooth mappings with patterns*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **137A** (2007), 415–430.
- [7] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Circular surfaces*, Advances in Geometry, **7** (2007), 295–313.
- [8] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, to appear in Ann. of Math.

- [9] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada *Behavior of corank one singular points on wave fronts*, to appear in *Kyushu J. Math.*
- [10] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, to appear in *Math. Z.*
- [11] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space*, プレプリント.
- [12] K. Saji, *Koenderink type theorems for fronts*, プレプリント.
- [13] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada,  *$A_k$  singularities of wave fronts*, プレプリント.
- [14] K. Saji, *Singularities of smooth map from plane to plane*, プレプリント.

#### 学会における口頭発表 (主なもの)

- 発表題名 : Singularities of non-degenerate 2-ruled hypersurfaces in  $\mathbf{R}^4$   
研究会名 : 接触構造, 特異点, 微分方程式  
日時・場所 : 2001 年 1 月・福岡大学セミナーハウス
- 発表題名 : 4次元空間内の一般化された線織面の特異点  
研究会名 : 4次元トポロジー研究集会  
日時・場所 : 2002 年 1 月・広島大学理学研究科
- 発表題名 : ボロノイ図の分岐について  
研究会名 : 特異点いたい放題  
日時・場所 : 2003 年 2 月・北海道大学理学研究科
- 発表題名 : 定径円織面について  
研究会名 : 第 51 回トポロジーシンポジウム  
日時・場所 : 2004 年 8 月・山形テルサ
- 発表題名 : 円織面について  
研究会名 : 函館特異点研究集会  
日時・場所 : 2004 年 10 月・サン・リフレ函館

- 発表題名 : Singularities of manifolds with patterns  
 研究会名 : 特異点における不変量  
 日時・場所 : 2005年6月・近畿大学
- 発表題名 : Singularities of smooth maps with patterns  
 研究会名 : 広島トポロジー研究集会 (3・4次元数学を目指して)  
 日時・場所 : 2006年2月・広島大学理学研究科
- 発表題名 : フロントのケンデリンクの定理  
 研究会名 : 特異点論 – 局所対大域  
 日時・場所 : 2006年6月・山口大学大学会館
- 発表題名 : 波面の特異点の判定法とその応用  
 研究会名 : 接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺  
 日時・場所 : 2007年1月・旭川市旭川ときわ市民ホール
- 発表題名 : 波面の特異点  
 研究会名 : 京都大学数理解析研究所研究集会「部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり」  
 日時・場所 : 2007年7月・京都大学数理解析研究所
- 発表題名 : 波面とその特異点  
 研究会名 : 第54回幾何学シンポジウム  
 日時・場所 : 2007年8月・鹿児島大学
- 発表題名 : Singularities of non-degenerate 2-ruled hypersurfaces in  $\mathbf{R}^4$   
 研究会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days  
 日時・場所 : 2001年9月・バナッハセンター, ポーランド・ベンドレヴォ
- 発表題名 : Singularities of ruled manifolds  
 研究会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days  
 日時・場所 : 2002年9月・バナッハセンター, ポーランド・ベンドレヴォ
- 発表題名 : Singularities of generalized ruled surfaces  
 研究会名 : Webs and projective differential geometry  
 日時・場所 : 2003年5月・松江・ホテル白鳥

- 発表題名 : Bifurcations of Voronoi diagrams and its applicatoins  
 研究会名 : Mathematical Society of Japan, 12th International Research Insitute,  
 Singularity Theory and Its Applications  
 日時・場所 : 2003年9月・札幌コンベンションセンター
- 発表題名 : Circular surfaces  
 研究会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days  
 日時・場所 : 2005年9月・ポーランド・ザコパネ
- 発表題名 : Circular surfaces  
 研究会名 : SNU-HU 3rd joint symposium on mathematics  
 日時・場所 : 2005年10月・ソウル大学・韓国
- 発表題名 : Circular surfaces  
 研究会名 : 幾何学唐津研究集会  
 日時・場所 : 2005年10月・虹の松原ホテル
- 発表題名 : Singularities of maps of surfaces into 3-space  
 研究会名 : Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision  
 日時・場所 : 2005年11月・北海道大学理学研究科
- 発表題名 : Koenderink type theorems for fronts  
 研究会名 : The international symposium on singularity theory and its applications  
 日時・場所 : 2006年9月・長沙理工大学・中国
- 発表題名 : Koenderink type theorems for fronts  
 研究会名 : Hayashibara forum on Singularities  
 日時・場所 : 2006年11月・IHES・フランス
- 発表題名 : Curvatures of singularities of wave fronts and its contour  
 研究会名 : Rencontre Singularités Grand-Sud  
 日時・場所 : 2006年11月・CIRM, Luminy, Marseille・フランス
- 発表題名 : Singularities of de Sitter horocyclic surfaces  
 研究会名 : 第二回日豪実・複素特異点研究集会  
 日時・場所 : 2007年11月, 京都大学数理解析研究所

- 発表題名 : Legendrian dualities for 'flat' surfaces in Lorentz-Minkowski pseudo-spheres II

研究会名 : The 3rd Geometry Conference for Friendship of Japan and China

日時・場所 : 2008 年 1 月 名古屋大学 野依記念ホール