

## 研究業績

### 研究内容・成果

解析関数空間は、解析関数からなる Banach 空間の総称である。1949 年に Beurling は座標関数  $z$  の乗算作用素に対する Hardy 空間の不変部分空間の特徴付けを行った。この結果は作用素論と関数論を結びつける重要な結果であり、解析関数空間の不変部分空間の研究はこの結果をもとに多くの研究者によって大きく発展してきた。現在の私の研究目的は、解析関数空間における不変部分空間の構造及び性質の解明である。その中で、これまで私は 2 変数 Hardy 空間  $H^2(\mathbb{D}^2)$  及び Segal-Bargmann 空間の不変部分空間について研究してきた。

#### 1. 2 変数 Hardy 空間

2 変数の解析関数空間で最も大きい問題は、Corona 問題である。1 変数のときは 1961 年に Carleson によって解決されているが、2 変数については分からないことが多く壁にぶつかったような状況になっている。2 変数及び多変数について少しでも多くの情報を得るため、多くの研究が行われている。2 変数の Hardy 空間の不変部分空間は、前に述べた理由から 1 変数の場合と比べてかなり複雑である。不変部分空間  $M$  上の座標関数  $z, w$  の乗算作用素をそれぞれ  $R_z, R_w$  とする。1988 年に Mandrekar によって  $R_z$  と  $R_w^*$  の交換子  $[R_z, R_w^*] = R_z R_w^* - R_w^* R_z$  が 0 となるときの不変部分空間  $M$  の特徴付けが得られた。 $R_z, R_w$  と同じように逆シフト不変部分空間  $N = H^2(\mathbb{D}^2) \ominus M$  上の座標関数  $z, w$  の乗算作用素をそれぞれ  $S_z, S_w$  とする。同様の結果として逆シフト不変部分空間上で  $[S_z, S_w^*]$  が 0 となるときの特徴付けが Izuchi-Nakazi-Seto によって行われている。これらの結果をもとに、交換子による不変部分空間及び逆シフト不変部分空間の分類を行ってきた。

これまで不変部分空間については、 $[R_z, R_w^*]$  が自己共役写像かつ 0 とならないような不変部分空間の存在を示し、その不変部分空間の上で  $[R_z, R_w^*]$  はランクが 1 であることを示した。また、ランクが 1 である非常に興味深い不変部分空間の存在を示した。この結果より、 $[R_z, R_w^*]$  のランクが 1 となる不変部分空間の特徴付けは複雑であることが推測できる。さらに定数でない 2 つの  $\mathbb{D}$  上有界正則関数  $\phi(z), \psi(w)$  に対して、 $[R_z, R_w^*] = 0$  と  $[R_{\phi(z)}, R_{\psi(w)}^*] = 0$  は同値であることを示した。逆シフト不変部分空間においても、 $[S_z^n, S_w^*]$  が 0 になる部分空間の特徴付けを行った。また  $[S_{\phi(z)}, S_w^*] = 0$  かつ  $[S_z, S_w^*] \neq 0$  であるとき、 $S_{\phi(z)} = c \cdot I$  ( $c$  は定数) となることを示した。 $[S_z, S_w^*]$  のランクが 1 となる商不変部分空間  $N$  の構造を完全に決定した。以上は泉池教授 (新潟大学) との共同研究である。また特別な形を持つ不変部分空間に対する  $[S_z, S_w^*]$  のランクについても決定

した。現在は、 $[R_z, R_w^*]$  と  $[S_z, S_w^*]$  の関係について研究している。。

## 2. Segal-Bargmann 空間

Segal-Bargmann 空間は  $\mathbb{C}$  上のガウス測度による 2 乗可積分整関数全体からなる Hilbert 空間である。この空間には不変部分空間が存在しないことが既に知られており、その代わりに似た性質を持つ準不変部分空間が定義され研究が行われている。私は、特に 1 変数および 2 変数の Segal-Bargmann 空間の準不変部分空間についての研究を行ってきた。その中で、1 変数の Segal-Bargmann 空間の cyclic vector を特徴付けた。これまでに cyclic vector の研究は多く行われているが、Hardy 空間以外に cyclic vector の特徴付けが知られている空間は存在しなかった。また、この Segal-Bargmann 空間の cyclic vector は、 $\mathbb{C}$  上に零点を持たない関数全てであることも分かった。これまでに、この性質を持つ空間の存在は全く知られておらず、多くの空間ではこの性質を持たないことが分かっている。実際、Brown-Shields によってこの性質に関連した問題が提起されている。後に、この結果の一般化を行った。また、2 変数の Segal-Bargmann 空間については、泉池教授との共同研究によって多項式によって生成される準不変部分空間相似な加群写像による分類を行った。この研究は、最近 Guo-Hou によって始められた研究である。多項式の積分評価式を導くことによって、完全ではないが多項式全体の多くを網羅する分類を行うことができた。現在は 1 変数の Segal-Bargmann 空間の零点列の性質について研究している。

### 2007 年度研究活動報告

#### 2007 年度に発表した論文

- (1) (with Kei Ji Izuchi) *Ranks of cross commutators on Backward shift invariant subspaces over the bidisk*, to appear in Rocky Mountain J. Math..
- (2) *Rank-one commutators on invariant subspaces of the Hardy space on the bidisk III*, submitted.

#### 2007 年度に行った講演

- (1) *Cyclic vectors in some weighted  $L^p$  spaces of entire functions*, 日本数学会年会, 東北大学, 2007 年 9 月.
- (2) *Polynomials having leading terms over  $\mathbb{C}^2$  in the Fock space*, 関数空間セミナー, 東京理科大学, 2007 年 12 月.
- (3) *Finite rank commutators on backward shift invariant subspaces over the bidisk*, the 11th Conference on Real and Complex Analysis, 広島大学, 2008 年 2 月.

### 発表論文リスト

- [1] Kou Hei Izuchi; *Cyclic vectors in the Fock space over the complex plane*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 3627–3630.
- [2] Keiji Izuchi, Kou Hei Izuchi; *Polynomials having leading terms over  $\mathbb{C}^2$  in the Fock space*, J. Funct. Anal. **225** (2005), 439–479.
- [3] Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi; *Rank-one commutators on invariant subspaces of the Hardy space on the bidisk*, J. Math. Anal. Appl. **316** (2006), 1–8.
- [4] Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi; *Cross commutators on backward shift invariant subspaces over the bidisk*, Acta Sci. Math. (Szeged) **72** (2006), 251–270.
- [5] Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi; *Rank-one commutators on invariant subspaces of the Hardy space on the bidisk II*, J. Operator Theory, 掲載決定.
- [6] Kou Hei Izuchi; *Cyclic vectors in some weighted  $L^p$  spaces of entire functions*, Canad. Math. Bull., 掲載決定.
- [7] Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi; *Ranks of cross commutators on Backward shift invariant subspaces over the bidisk*, Rocky Mountain J. Math., 掲載決定.
- [8] Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi; *Rank-one cross commutators on backward shift invariant subspaces on the bidisk*, 投稿中.
- [9] Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi; *Cross commutators on backward shift invariant subspaces over the bidisk II*, 投稿中.
- [10] Kou Hei Izuchi; *Rank-one commutators on invariant subspaces of the Hardy space on the bidisk III*, 投稿中.

### 主たる口頭発表リスト

- [1] *Cyclic vectors in the Fock space*, 日本数学会年会、日本大学理工学部、2005年3月.
- [2] *Cyclic vectors in the Fock-type spaces*, Analytic Function Spaces and Their Operators, Kyoto University Research Institute for Mathematical Science, 2006年6月.
- [3] *Cross commutators on the backward shift invariant subspaces over the bidisk*, Multivariable Operator Theory and Complex Analysis, Hokkaido University, 2006年8月.
- [4] *Cross commutators on the backward shift invariant subspaces over the bidisk*, The 10th Conference on Real and Complex Analysis, Hiroshima University, 2006年11月.

[5] *Cyclic vectors in some weighted  $L^p$  spaces of entire functions*, 日本数学会年会、東北大学、2007年9月.

[6] *Polynomials having leading terms over  $\mathbb{C}^2$  in the Fock space*, 関数空間セミナー、東京理科大学、2007年12月.

[7] *Finite rank commutators on backward shift invariant subspaces over the bidisk*, The 11th Conference on Real and Complex Analysis, Hiroshima University, 2008年2月.