

1. 研究内容・成果, 及び, 2006年度研究活動報告

北海道大 工 足立 二郎

研究内容・成果

多様体上の接分布, あるいは外微分式系に興味があります. まず, 接触構造に興味を持ちました. さらに現在では, Engel 構造, 高次の接触構造, ジェットバンドルの標準構造をはじめ, その他一般の接分布や, それに関するリジッドパスなど, 興味の対象は, 拡張し続けています. 接触構造, シンプレクティック構造のトポロジーは, 今まさに動いている分野です. ところが, Engel 構造などの外微分式系に対しては古くから研究がされているにも関わらず, 大域幾何的な研究はあまりないと思われる. ここでも, 特色のある研究を展開できないかと考えています.

• 接分布に関する Gray 型定理について.

多様体上の幾何構造を 1 パラメータで変形させた時, それがイソトピーで追跡できるかと言うのは, 興味深い問題です. 接触構造の場合が Gray の定理と呼ばれるものです.

余次元が 2 以上の接分布の場合に, 1 回の Lie カッコ積で束束全体になるものについて考察しました. 1 パラメータの変形を通して接分布内に余次元 1 の部分接分布で積分可能なものがある時, そのような変形は, イソトピーで追跡できることが分かりました. また, そのような余次元 1 の部分接分布は, もとの接分布から直接に定義できて, その記述は, 余次元が 1 の場合の Cauchy 特性系の記述とつじつまが合います. Montgomery と Zhitomirskii の結果と私の結果を併せて, Gray の定理のさらなる拡張が得られたこととなります.

さらに, 特殊多重旗構造に関する Gray 型の定理を考察しました. 1 回の Lie カッコ積で次元が 1 ずつ上がっていく接分布の旗構造は, Goursat 旗構造と呼ばれます. その一般化として, Lie カッコ積で 2 以上の大きな k -次元ずつ上がっていくもので良い性質を持つものを, 特殊多重旗構造と Mormul は定義しました. この旗構造に対し, 上の議論を適用することが出来ることが示せ, その結果, Gray 型の定理が得られました.

また, 4 次元多様体上の階数 2 の接分布に関してこの型の定理を考察しました. 最も積分不可能な物は Engel 構造です. 積分不可能性 (すなわち Engel 性) が退化して行く部分がジェネリックには, 二つの曲面として現れます. また, 階数 2 の接分布の 1 次の派生系として得られる (退化のある) 接分布に対して, 特性直線場と言うものが定義されます. これらの言葉で Gray 型定理の成り立つ十分条件を調べました.

• Engel 構造に関して.

Engel 構造とは, 4 次元多様体上の 2 次元の接分布で, 最も非ホロノームなものです. この構造は, 接触構造と同様に, 局所的な不変量を持たない珍しい接分布の一つです. 接触構造のように, Engel トポロジーという分野が構築されるかは未知ですが, 興味深い対象です.

3 次元多様体に埋め込まれた有向閉曲面上の特性葉層は, 接触構造の芽を決定します. そこで, 4 次元多様体に埋め込まれた 3 次元有向閉多様体に沿った Engel 構造の芽を決定する条件を考察しました.

Gershkovich は, \mathbb{R}^4 上のエキゾチックな構造を, Engel 直線場の違いにより構成しました. そこで, 標準 Engel 構造と同じ Engel 直線場を持ちながらエキゾチックである構造を調べました. $M^3 \times S^1$ 上の自明な Engel 直線場を持つ Engel 構造は, M 上の接触構造とねじれ数で特徴付けられ, $M^3 \times I$ 上のは, M 上の接触構造と, 最小ねじれ数と, 両端 $M \times \partial I$ 上の Legendre 葉層で決定されることを示しました. 3 次元接触トポロジーにおいては, 3 次元球体上のタイトな接触構造に関する Eliashberg の結果が, トポロジー的研究の起点になりました. この結果は, Engel トポロジーへの足掛かりにはなると思います.

3 次元接触トポロジーにおいて, Legendre 曲線または結び目は重要な役割を果たしました. 同様なものが Engel 多様体でも考えられるはず. そこで, 標準 Engel 4-次元空間への円周の埋め込みを考ました. 常に Engel 接分布に接するように埋め込まれた “水平円周” の水平イソトピーによる分類を得ました. 4 次元空間への 1 次元多様体の埋め込みなので, 結び目にはなりませんが, 標準 Engel 構造の標準枠に関する回転数が不変量になり, これで分類できることが分かりました. また, Engel 水平曲線は 特異点を持つ Legendre 曲線の持ち上げで表されるので, さらなる射影を考えることにより, Engel 水平曲線の意味での Reidemeister 移動を決めました.

Engel 構造の部分多様体への制限が Engel 構造の芽を決定するとすると、それは Engel 幾何学における大きな道具になります。単なる幾何的な制限では不十分で、より強い代数的制限ならば芽を決定することを示しました。

● 接触トポロジーに関して。

3次元球体上のタイトな接触構造は、境界の2次元球面上の特性葉層のみで一意に決まることが Ya. Eliashberg によって示されています。しかし、ソリッドトーラスの場合には、境界のトーラス上の特性葉層が同じでも異なるタイトな接触構造が存在します。そこで、境界のトーラス上の特性葉層のみで決まるための十分条件を調べました。

接触型の境界を持つシンプレクティック多様体による接触コボルディズムを構成し、考察しました。まず接触形式に関して議論して、さらに接触構造の場合、即ち接触形式の0にならない関数倍に関して拡張しました。

接触多様体の部分多様体も興味深い対象です。Legendre でも横断的でもない、3次元接触多様体内の結び目の新たな類を考察しました。横断的な結び目の拡張として“ジェネリック”なものを定義し、その分類を得ました。

● sub-Riemann 幾何、制御理論との関係。

3次元多様体上の階数2の接分布に常に接する径(みち)を考察しました。はめ込まれた閉区間の両端を止めた C^1 -級の摂動で安定なものを調べました。ここで言う“2-接分布”とは、孤立点での次元の変化を許すものです。多様体上の2点を結ぶ、2-接分布に常に接する径(みち)で、 C^1 -級の摂動で安定なものは、“リジッド”であると呼ばれます。このリジッドな径の完全な分類を得ました。

2006年度研究活動報告

論文

- *Global Stability of special multi-flags*, (preprint, 投稿中).
- *Classification of horizontal loops in the standard Engel space*, to appear in Int. Math. Res. Not.
- (with G. Ishikawa), *Classification of phase singularities for complex scalar waves*, (preprint, 投稿中).
- *Integral curves for contact and Engel structures*, Real and Complex Singularities, Proceedings of the Australian-Japanese Workshop, World Scientific (2007).
- *Relative local stability of Engel structures*, (preprint).

(その他)

- *On classification of horizontal loops in the standard Engel space*,
数理解析研究所講究録 1502 (2006), 29–41.

口頭発表

- “接分布の相対的局所安定性について”
「特異点論—局所対大域」山口大学 2006年6月
- “Relative Darboux theorem for Engel structures”
「葉層構造と幾何学」東京大学玉原国際セミナーハウス 2006年10月
- “Relative local stability for Engel structures”
「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」旭川市旭川ときわ市民ホール 2007年1月
- “Towards global geometry of tangent distributions”
「北海道大学-ソウル大学ジョイントシンポジウム」北海道大学 2007年2月。

(海外)

- “Relative local stability for Engel structures”
「Geometry of vector distributions, differential equations, and variational problems」
SISSA, Trieste, Italy 2006年12月。

(教室セミナー)

- “トポロジーの話題から”
「北海道大学工学部 COE 若手研究者研究発表会」北海道大学 2006年5月

2 . 発表論文リスト

北海道大 工 足立 二郎

- *Liouville setup and Contact cobordism*, Hokkaido Math. J. **25** (1996), 637–650.
 - *Generic knots in contact 3-manifolds*, Internat. J. of Math. **12** (2001), 625–636.
 - *Extension of tight contact structure from tori to solid tori*,
J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), 521–543.
 - *Uniqueness of the relative Darboux type tubular neighborhoods of transverse knots*,
(preprint).
 - *Classification of tight contact structures on solid tori with boundaries*, (preprint).
 - *Classification of contact structures on the open solid torus*, (preprint).
 - *Rigid paths of generic 2-distributions with degenerate points on 3-manifolds*,
Colloq. Math. **92** (2002), 161–178.
 - *Germes of Engel structures along 3-manifolds*,
Hokkaido Math. J. **33** (2004) 511–523.
 - *Deformation of tangent distributions of rank 2 on 4-dimensional manifolds*,
(preprint).
 - *Engel structures with trivial characteristic foliations*,
Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 239–255.
 - *Global Stability of distributions of higher corank of derived length one*,
Int. Math. Res. Not. **2003**, no. 49, 2621–2638.
 - *Global Stability of special multi-flags*, (preprint).
 - *Classification of horizontal loops in the standard Engel space*, to appear in Int. Math. Res. Not.
 - *Classification of phase singularities for complex scalar waves*, (preprint),
(with G. Ishikawa).
 - *Integral curves for contact and Engel structures*,
Real and Complex Singularities, Proceedings of the Australian-Japanese Workshop, World Scientific (2007), 1–32
 - *Relative local stability of Engel structures*, (preprint).
- (その他)
- *Generic knots in tight contact 3-manifolds*,
数理解析研究所講究録 **952** (1996), 119-130.
 - 開ソリッドトーラス上の接触構造,
数理解析研究所講究録 **1006** (1997), 69-80.
 - *Engel structures and Legendrian foliations*,
数理解析研究所講究録 **1328** (2003), 114–125.
 - *Various kinds of the Gray-type theorem*, 数理解析研究所講究録 **1374** (2004), 114–125.
 - *On classification of horizontal loops in the standard Engel space*,
数理解析研究所講究録 **1502** (2006), 29–41.

3. 主たる口頭発表のリスト

北海道大 工 足立 二郎

- “接触形式の半順序”
「接触幾何学と関連分野」 大阪大学 1994年1月
- “3次元接触幾何学入門 –Bennequin の仕事を中心に–”
- “3次元接触幾何学入門 –Eliashberg の仕事を中心に–”
「3次元多様体週間」 東京工業大学 1994年12月
- “3次元接触多様体の transversal knot と wave front との関係”
「可微分写像の特異点論：トポロジーと応用」 京都大学数理解析研究所 1996年1月
- “開3次元多様体上の接触構造”
「接触幾何学と関連分野」 北海道大学 1996年1月
- “3次元多様体上の平面場について”
「実特異点論言いたい放題」 北海道大学 1996年3月
- “tight な3次元接触多様体内の generic な結び目”
「日本数学会 年会」 新潟大学 1996年4月
- “Generic knots in tight contact 3-manifolds”
「基本群の表現空間と位相不変量」 京都大学数理解析研究所 1996年6月
- “開ソリッドトーラス上の接触構造”
「可微分写像の特異点論：トポロジーと応用」 京都大学数理解析研究所 1997年1月
- “境界上の特性葉層からの接触構造の拡張とその応用”
「北見’98 接触幾何とシンプレクティック幾何」 北海道津別町ホテルフォレスト 1998年1月
- “Contact structures on open solid tori”
「部分多様体と特異点のトポロジーと幾何」 埼玉大学 1998年11月
- “Rigid paths of generic 2-distributions on 3-manifolds”
「Foliation Symposium 1998」 広島県 国民宿舎みやじま杜の宿 1998年12月
- “ジェネリックな接分布と接触構造について”
「接触幾何とシンプレクティック幾何」 石川県 KKR金沢 1999年1月
- “Germs of Engel structures along 3-manifolds”
「Free talks on real singularities」 北海道大学 1999年3月
- “接分布と曲線の幾何学”
「トポロジーシンポジウム」 北海道大学 1999年7月
- “Engel 構造の幾何学について”
「いろいろなカテゴリーでの多様体のトポロジーと特異点」 和歌山市民会館 1999年9月
- “On contact structures on solid tori”
「葉層構造に見るトポロジーとジオメトリー」
日本大学理工学部八海山セミナーハウス 1999年10月
- “接分布の非ホロノミー性と変形について”
「接触構造、特異点、微分方程式」 福岡大学セミナーハウス 2001年1月

- “Engel 構造と Legendre 葉層構造について”
「葉層構造の幾何学」 龍谷大学 2002 年 9 月
- “Engel structures and Legendrian foliations”
「特異点論におけるいくつかの話題」 京都大学数理解析研究所 2002 年 11 月
- “長さ 1 の k -flag の安定性について”
「伊豆トポロジーセミナー」 静岡県 IRC 伊豆瑞光園 2003 年 3 月
- “3 次元多様体上の階数 2 の接分布に関するリジッドパス”
「日本数学会 年会」 東京大学駒場キャンパス 2003 年 3 月
- “Engel 構造と Legendre 葉層構造”
「日本数学会 年会」 東京大学駒場キャンパス 2003 年 3 月
- “様々な Gray 型定理”
「特異点論における新しい方法と対象」 京都大学数理解析研究所 2003 年 11 月
- “接分布の大域的安定性について”
「接触構造, 特異点と周辺分野」 松本市中央公民館 (Mウイング) 2004 年 1 月
- “余次元の高い接分布の大域的安定性について”
「日本数学会 年会」 筑波大学 2004 年 3 月
- “3 次元多様体に沿った Engel 構造の芽について”
「日本数学会 秋季総合分科会」 北海道大学 2004 年 9 月
- “Classification of horizontal loops in the standard Engel space”
「はこだて特異点研究集会」 サン・リフレ函館 2004 年 10 月
- “Global stability of special k -flag”
「Geometry in Nara – Around Subriemannian Geometries –」 奈良女子大学 2004 年 12 月
- “Special k -flag の大域的安定性”
「接触構造, 特異点と周辺分野」 ソフトピアジャパン (岐阜県大垣市) 2005 年 1 月
- “接分布の大域的安定性について”
「特異点における不変」 近畿大学 2005 年 6 月
- “Geometry of distributions from the global perspective” (2 回連続)
「Singularities on differential systems」 北海道大学 2005 年 10 月
- “Classification of horizontal loops in the standard Engel space”
「Developments of Cartan geometry and related mathematical problems」
京都大学数理解析研究所 2005 年 10 月
- (with G. Ishikawa) “Classification of phase singularities for complex scalar waves”
「Phase Singularities and Topology」 北海道大学 2005 年 12 月
- “Geometry of distributions from the global perspective”
「接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺」
鳴門地域地場産業振興センター 2006 年 1 月
- “Relative Darboux-type theorem for Engel structures”
「伊豆トポロジーセミナー」 静岡県 伊豆瑞光園 2006 年 3 月

- “接分布の相対的局所安定性について”
「特異点論—局所対大域」 山口大学 2006年6月
- “Relative Darboux theorem for Engel structures”
「葉層構造と幾何学」 東京大学玉原国際セミナーハウス 2006年10月
- “Relative local stability for Engel structures”
「接触構造, 特異点、微分方程式及びその周辺」 旭川市旭川ときわ市民ホール 2007年1月

(教室セミナー)

- “接触形式の半順序について”
「微分トポロジーセミナー」 京都大学 1993年12月
- “外微分形式系に関するトポロジーについて”
「阪大トポロジーセミナー」 大阪大学 1999年10月
- “4次元多様体上の階数2の接分布の変形について”
「幾何学コロキウム」 北海道大学 2001年2月
- “3次元多様体上の階数2の接分布に関するリジッドパスについて”
「幾何セミナー」 奈良女子大学 2002年7月
- “様々な Gray 型定理について”
「特異点論セミナー」 北海道大学 2003年10月
- “接分布の大域的安定性について”
「トポロジー金曜セミナー」 九州大学 2004年1月
- “Classification of integral loops in the standard Engel space”
「北海道大学特異点論セミナー」 北海道大学 2004年4月
- “Global stability of special k -flags”
「北海道大学特異点論セミナー」 北海道大学 2004年10月
- “トポロジーの 匂へど”
「北海道大学工学部 COE 特別セミナー」 北海道大学 2004年10月 ~ 12月
- “標準エンゲル空間の水平ループについて”
「北海道大学工学部 COE 若手研究者研究発表会」 北海道大学 2005年8月
- “トポロジーの話題から”
「北海道大学工学部 COE 若手研究者研究発表会」 北海道大学 2006年5月

(海外・国際集会)

- “Engel structures and Legendrian foliations”
「Geometry-Topology Seminar」 University of Pennsylvania 2001年10月
- “Global stability of distributions of higher corank”
「Geometry and Foliations 2003」 龍谷大学深草校舎 2003年9月
- “Global stability of distributions of higher corank”
「Singularity theory and its applications」 札幌コンベンションセンター 2003年9月

- “Global stability of singular Engel structures”
「Chinese–Japanese Singularity theory workshop」
Northeast Normal University, China 2004年6月.
- “Stability of a certain kind of tangent distributions”
「Polish–Japanese Singularity theory working days」
MRCC in Bedlewo, Poland 2004年9月.
- “Global stability of some non-holonomic distributions and flags”
「Nonholonomic geometry and control theory seminar」
Institute of Mathematics, Poland 2005年2月.
- “Introduction to Engel topology”
Warsaw University, Poland 2005年3月.
- “Some extensions of the Gray theorem”
「Singularity theory seminar」
Poly-technique of Warsaw, Poland 2005年3月.
- “Stability of a certain kind of tangent distributions”
Technion, Israel 2005年3月.
- “On horizontal curves in the standard Engel space”
「Polish–Japanese Singularity theory working days」
Bukowina Tatrzańska, Poland 2005年7月.
- “On horizontal loops in the standard Engel space”
「Australian–Japanese Workshop on Real and Complex Singularities」
University of Sydney, Australia 2005年9月.
- “Relative local stability for Engel structures”
「Geometry of vector distributions, differential equations, and variational problems」
SISSA, Trieste, Italy 2006年12月.
- “Towards global geometry of tangent distributions”
「北海道大学-ソウル大学ジョイントシンポジウム」 北海道大学 2007年2月.