代数学考究１

問題１． 複素 n 次正方行列の全体 $M_n(\mathbf{C})$ は複素線型空間となる．$n\times n$ 行列 $A\in M_n(\mathbf{C})$ は相異なる n 個の固有値をもつと仮定する．

(1) $W=\{P\in M_n(\mathbf{C}) \mid PA=AP\}$ は $M_n(\mathbf{C})$ の部分空間となることを示せ．

(2) W の次元を求めよ．

問題２． V を有限次元ベクトル空間とする．線形変換 $f:V\to V$ が，$\mathrm{Im}\ f^2=\mathrm{Im}\ f$ を満たすとき (必ずしも $f^2=f$ とはかぎらないことに注意)，次のことを示せ．

(1) $\mathrm{Ker}\ f^2=\mathrm{Ker}\ f$

(2) $\mathrm{Im}\ f\cap \mathrm{Ker}\ f=\{\ \mathbf{0}\ \}$

(3) $V=\mathrm{Im}\ f\oplus \mathrm{Ker}\ f$ (直和) ここに，$f^2=f\circ f$ であり，$\mathrm{Im}\ h, \mathrm{Ker}\ h$ $(h=f,f^2)$ は，それぞれ，線形変換 h の像および核を表す．

代数学考究２

問題１． p を素数，Ω を p と互いに素な個数の元をもつ有限集合とする．p 群 G が Ω に作用しているときに Ω には不動点が存在することを証明せよ．すなわち，ある $x\in\Omega$ が存在して，任意の $g\in G$ に対して $gx=x$．

問題２． S_n を n 次の対称群とする．S_n から乗法群 $C^\times\ (=C\setminus\{0\})$ への群準同型写像は

(1) $\varphi(g)=1\quad(\forall g\in S_n)$

又は

(2) $\varphi(g)=\mathrm{sgn} g\quad(\forall g\in S_n)$

であることを示せ．

代数学考究３

問題１． M を環 R 上の加群とし，f を M から M 自身への R-準同型写像とする．

(1) f が２条件 $\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}\ f^2$，$\mathrm{Ker}\ f=\mathrm{Ker}\ f^2$ を満たすとき，$M=\mathrm{Im}\ f\oplus \mathrm{Ker}\ f$ (直和) となることを証明せよ．

(2) M は極大条件および極小条件を満たすとする．すなわち，M の部分 R-加群からなる空でない集合は，包含関係に関して極大元および極小元をもつとする．このとき，十分大きな自然数 n に対して，$M=\mathrm{Im}\ f^n\oplus \mathrm{Ker}\ f^n$ となることを示せ．

問題２．

(1) 可換環 $R = \mathbf{Z}[x]/(x^2-2)$ の 3 を含む素イデアルをすべて求めよ．

(2) 可換環 $R = \mathbf{Z}[x]/(x^2-2)$ の 7 を含む素イデアルをすべて求めよ．

代数学考究４

問題１． 複素数体 $\mathbf{C}$ 上の有理関数体 $L = \mathbf{C}(t)$ において，$u \notin \mathbf{C}$ なる L の元 u から $\mathbf{C}$ 上生成される L の部分体を $F = \mathbf{C}(u)$ とする．

(1) L の F 上の自己同型群 $\mathrm{Aut}(L/F)$ は有限群であることを示せ．

(2) 次の u に対して，自己同型群 $\mathrm{Aut}(L/F)$ を求めよ．

$$\text{(a) } u = t^3, \qquad \text{(b) } u = t^3 + \frac{1}{t^3}, \qquad \text{(c) } u = t^2 - t.$$

問題２． $\mathbf{Q}$ は有理数全体のなす体，$\mathbf{R}$ は実数全体のなす体とする．

(1) $\alpha := \sqrt{5+\sqrt{5}} \in \mathbf{R}$ とおく．$\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}$ はガロア拡大であることを示し，ガロア群 $\mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ を求めよ．

(2) $\beta := \sqrt{3+\sqrt{11}} \in \mathbf{R}$ とおく．$\mathbf{Q}(\beta)/\mathbf{Q}$ のガロア閉包を $K/\mathbf{Q}$ とする．$[K:\mathbf{Q}]$ を求めよ．

幾何学考究１

問題１． 次の問に答えよ．

(1) 単位球面 $S^2 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R^3} \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\}$ は，$\mathbf{R^3}$ の有界閉集合であることを示せ．

(2) $X := \mathbf{R^3} \setminus \{0\}$ とし，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続写像とする．任意の $x, y \in X$ と任意の正数 r に対して，

$$y = rx \ \text{ ならば，} f(x) = f(y)$$

が成り立つとき，$f(X)$ がコンパクトであることを示せ．

問題２． $(X, d\,)$ を完備距離空間とし，$f : X \to X$ を連続写像で，ある $c > 0$ に対して

$$d(f(x_1), f(x_2)) \geq c\, d(x_1, x_2), \quad (\forall\, x_1, x_2 \in X)$$

を満たすものとする．

(1) $f(x_n) = y_n$ とするとき，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するならば，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束することを示せ．

(2) $K \subset X$ が閉集合ならば，$f(K)$ も閉集合となることを示せ．

幾何学考究２

問題１． $X,\ M,\ N$ を C^∞-可微分多様体とし，$\pi : X \to N$ をしずめこみ (submersion) とする．$f : M \to N : C^\infty$-写像に対して，

$$Y = \{(m,\ x) \in M \times X \mid f(m) = \pi(x)\} \subset M \times X$$

は積多様体 $M \times X$ の部分多様体であり，$p : Y \to M,\ p(m,\ x) = m$ は submersion であることを示せ．ここに，$p : Y \to M$ は，$M \times X$ の第 1 成分への射影 $p_1 : M \times X \to M$ の Y への制限である．

問題２． 複素 $(n+1)$ 次元数ベクトル空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ の部分集合

$$A_n := \{(z_1,\ \ldots,\ z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1\}$$

について，つぎに答えよ．

(1) A_n は $\mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{R}^{2(n+1)}$ の $2n$ 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

(2) A_1 は $\mathbf{R}^1 \times S^1$ と微分同相であることを示せ．

(3) 一般に A_n は $S^n := \{(x_1,\ \ldots,\ x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ の接ベクトル束の全空間と微分同相であることを示せ．

問題３． 上半平面 $H := \{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$ 上で定義された 1 次の微分形式 ω で

(a) H 上で，$\omega\left(\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial}{\partial y}\right) = 1,\ d\omega = 0$

(b) 半直線 $x = 0$ 上で $\omega\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right) = 0$

をみたすものを求めよ．

幾何学考究３

問題１． $X,\ Y$ を弧状連結な位相空間，$f : (X,\ x_0) \to (Y,\ y_0)$ を基点を保つ連続写像，$f_* : \pi_1(X,\ x_0) \to \pi_1(Y,\ y_0)$ を f の誘導する基本群の準同型写像とする．このときつぎの (1) から (4) について，正しいものは証明し，正しくないものは反例を 1 つ挙げよ．

(1) f が全射なら，f_* は全射である．

(2) f が単射なら，f_* は単射である．

(3) f が全単射なら，f_* は同型写像である．

(4) f が同相写像なら，f_* は同型写像である．

問題２． ２次元多様体 $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の $1-$ 型式

$$\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

を考える．ここで $x,\, y$ は $\mathbf{R}^2$ の通常の座標を表す．

(1) θ は閉型式であることを示せ．

(2) 閉曲線 $C : [0,\, 1] \ni t \mapsto (\cos 2\pi t,\, \sin 2\pi t) \in M$ 上の積分 $\displaystyle\int_C \theta$ を計算せよ．

(3) θ は完全型式であるかどうかを調べよ．

問題３． ３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の連結で滑らかな閉曲線 S について，そのすべての法線がある一定点を常に通るとき，その曲面は球面となることを証明せよ．

幾何学考究４

問題１． 次の問に答えよ．

(1) $f,\, g : S^n \to S^n$ を単位球面の連続写像とし，任意の $\mathbf{x} \in S^n$ に対し $f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})$ を満たすとする．このとき，$f \simeq a \circ g$．すなわち f は $a \circ g$ とホモトピックであることを示せ．ただし，$a : S^n \to S^n,\, a(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ は対心点写像とする．

(2) (1) で，$H_n(f) = (-1)^{n+1}H_n(g)$ を示せ．ただし，$H_n(f) : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ は $f : S^n \to S^n$ が誘導する n 次元ホモロジー群の準同型写像とする．

(3) 連続写像 $h : S^n \to S^n$ は，$H_n(f) \neq (-1)^{n+1}\mathrm{id}_{H_n(s^n)}$ ならば不動点をもつことを示せ．ただし，$\mathrm{id}_{H_n(S^n)}$ は $H_n(S^n)$ の恒等写像である．

問題２． $P_1,\, \ldots,\, P_n$ を２次元球面 S^2 上の相異なる n 個の点とし，これらの点をすべて同一視して得られる空間を X とする．

(1) X を胞体分割せよ．

(2) X の整数体ホモロジー群を求めよ．

問題３．

(1) 整数係数２次元ホモロジー群 $H_2(\mathbf{C},\, \mathbf{C} \setminus \{0\}) = H_2(\mathbf{C},\, \mathbf{C} \setminus \{0\}; \mathbf{Z})$ を計算せよ．ただし，$\mathbf{C}$ は複素平面を表す．

(2) $f(x)$ を $z = 0$ のまわりで定義された正則関数で Taylor 展開

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots\cdots,$$

ただし $k \geq 1,\ a_k \neq 0$ を持つとする．このとき，f が準同型

$$f_* : H_2(\mathbf{C},\ \mathbf{C}\setminus\{0\}) \to H_2(\mathbf{C},\ \mathbf{C}\setminus\{0\})$$

を誘導することを示し，それを生成元を用いて表せ．

解析学考究１

問題１． $\mathbf{Z},\ \mathbf{R}$ がそれぞれ整数全体，実数全体を表すとき，次を示せ．

(1) $\forall\, x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+n}$ は発散する．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right\}$ は開区間 $(0,1)$ 上広義一様絶対収束する．

問題２． $f(x,y)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y},\ D=\{0<x,y\leq 1\}$ とする．

(1) $D_j=\left\{\dfrac{1}{j}\leq x,\ y\leq 1\right\},\quad j=1\cdots$ としたとき，$\lim_{j\to\infty}\displaystyle\iint_{D_j}f(x,y)dxdy$ を求めよ．

(2) $E_j=\left\{\dfrac{1}{j^2}\leq x\leq 1,\ \dfrac{1}{j}\leq y\leq 1\right\},\quad j=1\cdots$ としたとき，$\lim_{j\to\infty}\displaystyle\iint_{E_j}f(x,y)dxdy$ を求め，広義積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ が定義されないことを示せ．

解析学考究２

問題１． 複素平面全体で正則な関数 f が高々k 次の多項式となるための必要十分条件は，定数 $A,\ B$ があって，複素平面上で $|f(z)|\leq A+B|z|^k$ を満たすことである．これを証明せよ．

問題２．

(1) $t>1$ を満たす実数 t に対し

$$F(t) := \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{t+\cos\theta}$$

とおくとき，$F(t)$ を留数定理を使って計算せよ．

(2) (1) の結果を利用して，$z\in\mathbf{C}\setminus[-1,\ 1]$ のとき

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{z+\cos\theta}$$

を計算せよ．

解析学考究３

問題１． $(X,\,\mathcal{M},\,\mu)$ を有限測度空間，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X 上の可測関数の列とする．

$$A=\{x\in X\ :\ \exists\lim_{n\to\infty}f_n(x)\}$$

上で，関数 f を

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

で定義する．このとき次を示せ．

(1) $A\in\mathcal{M}$.

(2) f は A 上可測.

(3) $\forall\varepsilon>0,\ \exists B\in\mathcal{M},\ B\subset A,\ \mu(B)<\varepsilon,$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{|f(x)-f_n(x)|\ :\ x\in A\setminus B\}=0.$$

問題２． 実数直線 $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可積分関数全体を $L^1=L^1(\mathbf{R})$ とする．L^1 の元 $f(x)$ に対し，そのフーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ を $\hat{f}(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbf{R}}f(x)e^{-ix\xi}dx$ で定義する．今，$f\in L^1$ を 1 つ固定する．

(1) $\hat{f}(\xi)$ は連続関数であることを示せ．また，$\displaystyle\sup_{\xi\in\mathbf{R}}|\hat{f}(\xi)|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}||f||_1$ が成り立つことを示せ．ただし，$||f||_1=\displaystyle\int_{\mathbf{R}}|f(x)|dx$ とする．

(2) $\lim_{y\to 0}||f_y-f||_1=0$ を示せ．ただし，$f_y(x)=f(x-y)$ とする．ここで，”コンパクトな台を持つ連続関数全体が L^1 に於いてノルム $||\cdot||_1$ に関し稠密である”という事実は既知とする．

(3) $(\widehat{f_y-f})(\xi)=(e^{-iy\xi}-1)\hat{f}(\xi)$ を示せ．

(4) $\lim_{|\xi|\to\infty}|\hat{f}(\xi)|=0$ (リーマン・ルベーグの定理) を証明せよ．

解析学考究４

問題１． $X=C\,[0,1],\ ||f||=\sup_{x\in[0,\,1]}|f(x)|$ とする．$g\in C\,[0,1]$ が与えられたとき $K_g:X\to X$ を

$$(K_gf)(x)=\int_0^x g(t)f(t)dt\qquad f\in C\,[0,\ 1]$$

とおく．

(1) K_g はコンパクト線型作用素であることを示せ．

(2) 任意の連続線型作用素 $T : X \to X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $g \in C\ [0,\ 1]$ が存在して $||T - K_g|| < \varepsilon$ と出来るだろうか．これを示すか反例をあげよ．

問題２． $\ell^2(\mathbf{Z}) = \{(x_n)_{n\in\mathbf{Z}} : x_n \in \mathbf{C}(n \in \mathbf{Z}),\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} |x_n|^2 < \infty\}$ を通常の内積 $<(x_n)_{n\in\mathbf{Z}},\ (y_n)_{n\in\mathbf{Z}} >= \sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n \bar{y}_n$ をもつヒルベルト空間とする．また，与えられた有界な複素数列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ に対して，$\ell^2(\mathbf{Z})$ から $\ell^2(\mathbf{Z})$ への有界線形作用素 $T_{\mathbf{a}}$ を

$$T_{\mathbf{a}}(X) = (a_n x_n)_{n\in\mathbf{Z}}, \qquad (X = (x_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z}))$$

によって定義する．

(1) $T_{\mathbf{a}}$ のノルムと共役作用素 $T_{\mathbf{a}}^*$ を求めよ．

(2) $T_{\mathbf{a}}$ のスペクトル $\sigma(T_{\mathbf{a}})$ を求めよ．

(3) $\lim_{|n|\to\infty} a_n = 0$ のとき，$T_{\mathbf{a}}$ はコンパクト作用素であることを示せ．

数理科学考究１

問題１． $M > 0,\ K > 0$ を定数．$\mu(\xi)$ は $\mathbf{R}$ 上の正の値をとる C^1- 級関数とする．ただし，ある定数 $\delta > 0$ があって $\mu(\xi) \geq \delta\ (\xi \in \mathbf{R})$ であるとする．いま微分方程式

$$M\frac{d^2u}{dt^2} = -Ku(t) - \mu(u(t))\frac{du}{dt} \qquad \text{(I)}$$

を考える．これは粒子の振動現象によくあらわれるモデル方程式である．

(i) 解 (実数値) $u = u(t)$ にたいして

$$E(t) = \frac{M}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{K}{2}u(t)^2$$

とおいたとき，$E(t)$ が t に関して単調現象であること，等式

$$E(t) + \int_0^t \mu(u(s))\left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds = E(0)$$

を示しなさい．

(ii) 方程式 (I) は具体的にはどのような物理現象の運動方程式であると解釈できるか説明しなさい．方程式の各項の意味も述べること．

(iii) 時間変数 t が増大するとき $u(t)$ はどのように振る舞うかを予想しなさい．数理的あるいは物理的な説明どちらでもよい (証明までは要求しない)．

問題２． 実数値関数 $u = u(t),\ v = v(t)$ に関する微分方程式

$$\text{(B)} \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(4-u^2-v^2) \\ v(1-u^2-v^2) \end{pmatrix}$$

を考える．ただし，初期値 $u(0)=\alpha,\ v(0)=\beta$ は $1<\alpha^2+\beta^2<4$ を満たしていると仮定する．このとき，次を考えよ．

(1) 極座標による未知関数の変換 $u(t) = r(t)\cos\theta(t),\ v(t) = r(t)\sin\theta(t)$ を行ったとき $r(t),\ \theta(t)$ が満たす方程式を求めなさい．

(2) 方程式 (B) の解は $0 \le t < \infty$ の範囲で存在し $1 < u(t)^2 + v(t)^2 < 4\ \ (t \ge 0)$ を満たすことを示しなさい．

(3) t を増大させていったときの $(u(t),\ v(t))$ の軌道はどうなるか考察しなさい．

数理科学考究２

問題１． 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された独立な実確率変数 X と Y を考える．X と Y が共に可積分で，さらに Y の平均が 0 であるならば，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$E\big[|X+Y|\big] \ge E\big[|X|\big]$$

問題２． λ を正の定数とする．

(1) 平均 λ のポアソン分布に従う確率変数 X の特性関数 $\varphi(t)$ を求めよ．

(2) $\mathbf{R}$ 上の有界連続関数 f に対して次を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(n\lambda)^k}{k!} = f(\lambda).$$

数理科学考究３

問題１． 次のプログラムを読んで，以下の問いに答えよ．

```
int main(void)
{
        double a = 2.0, epsilon = 1.e-6;
        double mid, small = 0.0, large = 10.0;

        while (large - small > epsilon)
        {
                mid = (small + large) / 2;
                if (mid * mid < a)
                {
                        small = mid;
                }
                else
                {
                        large = mid;
                }
        }

    /* mid の出力 */
        printf("the answer = %8.4f\n", mid);
}
```

(1) このプログラムを実行したときの，変数 mid の値の変遷を最初の 5.0 を含めて 5 つ書け。

(2) このプログラムを実行したとき，出力される値を書け．ただし，このプログラムの出力文では，少数点以下 4 桁までの近似値を出力するように指定している．

(3) このプログラムを実行したとき，代入文 mid = (small + large) / 2; は何回実行されるか．ただし，プログラム中の 1.e-6 とは 10^{-6} のことであり，また $\log_{10}2 = 0.301$ とする．

問題2． 次のプログラムを読んで，以下の問いに答えよ．

```
int main(void)
{
        int c = 13, x[2004], i;

    /* x[0] を入力する */
        printf("Input a positive integer as x[0] : ");
        scanf("%d", &x[0]);

    /* 数列 x[i] を生成する */
        for (i = l; i <= 2003; i++)
        {
                x[i] = (x[i-1] * x[i-1]) % c;
        }

    /* x[2003] を出力する */
        printf("x[2003]= %d\n", x[2003]);
}
```

このプログラムを実行する際に，x[0] として 0,1,2,...,12 の 13 通りの数のうちから，どれかの数を入力することにする．
（注：二つの自然数 a, b に対し a % b は a を b で割ったときの剰余を表す）

(1) このプログラムを実行した結果，x[2003] = 1 が出力された．x[0] として入力された数は何であったか，可能性のあるものをすべて挙げよ．

(2) このプログラムを実行した結果，x[2003] = 3 が出力された．x[0] として入力された数は何であったか，可能性のあるものをすべて挙げよ．

問題3． 次の２つの命題論理式は論理同値であることを示せ．ただし、$p_1, \cdots, p_n$ は命題変数とする．

(1) $\bigwedge_{i<j}(p_i \vee p_j)$

(2) $(\bigwedge_i p_i) \vee \bigvee_i (\neg p_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} p_j)$

問題4． 正しく入れ子になった左カッコと右カッコの列で長さ $2n$ のものの個数を c_n とする．たとえば，$n = 1, 2, 3$ のときの列は

$$(); \ ()(), \ (()); \ ()()(), \ ()(()), \ (())(), \ (()()), \ ((()))$$

なので，$c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 5$ である．便宜上 $c_0 = 1$ とする．

(1) $c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_0 \ \ (n \geq 1)$ を示せ.

(2) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の満たす関数方程式を求めよ.

(3) 一般項 c_n を求めよ.