小平の変形理論とその後の発展

北海道大学　　中村　郁

1　はじめに

この稿では，小平先生の変形理論とその (潜在的なものも含めた) 影響について，紹介したいと思います。与えられた対象を出発点 (または初期値) とする新しい対象 (これを変形という)，できればもっとも普遍的な対象を構成し，具体的には構成できない場合でも，良い変形の存在の証明を目指す，これが変形理論です。小平-Spencer 以前にも Teichmüller 理論，楕円曲線やアーベル多様体の理論はありましたが，変形という概念が数学的に定式化され，強力な数学的手段となったのは，小平-Spencer の複素構造の変形理論が最初です。この小平-Spencer の変形理論の確立には，岡，カルタンに始まる連接層とコホモロジーの理論が必要でした。

その後，小平-Spencer の変形理論は，少なくとも，その考え方の原理的な点において，代数幾何学の枠組みを越えて，数学のいろいろな分野で，引き継がれ生き続けています。たとえば，解析空間の変形，写像の変形，バンドルの変形およびモジュライ理論，自己双対接続のモジュライ空間，群の表現の変形，などなど。また，この稿は，主として，高校生，大学１，２年生，またはまったく専門外のひとを対象に，少なくとも，第 2 節までは読めるように書きました。文献引用で，[小平 1958/p.744] とあるのは，1958 年出版，全集の p.744 に収録，という意味です。なお，敬称は原則として省略します。

高校生などには，耳慣れない用語が出てくることが多いと思います。複素多様体，代数多様体や解析空間は，単に空間と読み，正則写像は写像，複素構造，可微分構造と位相構造は，それぞれ，精密な構造，中間の構造，粗い構造と思って読んでください。コホモロジー類は分類のラベルです。考えるのはすべて，複素数上なので，実数上は，つまり，感覚上は 2 倍の次元になることも注意してください。

２次元複素射影空間 $\mathbf{P}^2$ のことから，お話しします。まず，$\mathbf{C}$ を複素数全体として，$\mathbf{C}^3 = \{(x_0, x_1, x_2); x_i \in \mathbf{C}\}$ とします。原点を $O = (0, 0, 0)$ として，$\mathbf{C}^3 \setminus \{O\}$ を考えます。このとき，２次元複素射影空間 $\mathbf{P}^2$ とは，$\mathbf{C}^3 \setminus \{O\}$ に属する点 (x_0, x_1, x_2) の座標の比の集合のことです。つまり，比が一致すれば同じ点とみなす，という約束 (同値関係) で，$\mathbf{C}^3 \setminus \{O$ を見直した集合が $\mathbf{P}^2$ です。

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{C}^3 \setminus \{O\}/\text{比が同じなら同一視}$$

たとえば，$x_0 \neq 0$ ならば，(x_0, x_1, x_2) と $(1, x_1/x_0, x_2/x_0$ は　同　じ　点　を　表　わ　しますから，$\mathbf{P}^2$ の中には，$\mathbf{C}^2 = \{(1, u, v); u, v \in \mathbf{C}\}$ が入っていて，$\mathbf{P}^2$ はこの $\mathbf{C}^2$ にすこし縁をつけたものです。$\mathbf{P}^2$ は複素 2 次元，実 4 次元です。$\mathbf{C}^3 \setminus \{O\}$ のかわりに，$\mathbf{C}^2 \setminus \{(0, 0)$ をとれば，1 次元複素射影空間 (有理曲線) $\mathbf{P}^1$ が得られます。

2　変形理論

ところで，いよいよ表題の変形とは何かを説明しましょう。ここで，問題にするのは，ある精密な幾何学的構造，複素構造の変形です。まず，複素構造を微分することを考えます。そこで，次の $\mathbf{P}^2$ の中の曲線族をとります。$F(x, t) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - t x_0 x_1 x_2$ とし，

$$E(t) = \{x \in \mathbf{P}^2; F(x, t) = 0\}$$

とします。t をひとつ定めるごとに，$\mathbf{P}^2$ の部分集合 $E(t)$ が定まり，変化しています。これが変形です。$\mathbf{P}^2$ は複素 2 次元ですから，$E(t)$ は 1 次元下がって，複素 1 次元したがって，実 2 次元です。$E(t)$ は，$t^3 \neq 1$ のとき，ドーナツの表面の形をしています。これを，位相構造が不変と言います。$t^3 = 1$ のときは，$E(t)$ が 3 個の（位置を変えた）$\mathbf{P}^1$ となるので, 除外しておきます。

ところで，小平-Spencer は，関数を微分するように，$E(t$ の幾何学的な微分ができることを示しました。まず，関数の微分としては

$$(\partial F(x, t)/\partial t)_{t=t_0} = x_0 x_1 x_2$$

となりますが，問題はその幾何学的解釈です。ここで，$\partial F(x,t)/\partial t$ は x を止めて，t について微分することを表わします。問題が微妙であることを示すために，$G(x,t)=x_0^3+x_1^3+tx_2^3$ とし，$X(t)=\{x\in \mathbf{P}^2; G(x,t)=0\}$ を考えます。$t=0$ は $X(t)$ が特異点をもつので，ここでは除外します。微分は $\partial G(x,t)/\partial t = x_2^3$ ですが，$t\neq 0$ のとき，新しい座標 $x_2'=\sqrt[3]{t}x_2$ をとれば，

$$X(t): x_0^3+x_1^3+(x_2')^3=0$$

となります。$X(t)$ は幾何学的に一定ですから，幾何学的微分はゼロと考えるべきでしょう。このように，関数の微分はゼロでなくても，幾何学的微分はゼロになることがあります。この事情を正しく反映した微分を定義しなければなりません。小平-Spencer は $\partial F(x,t)/\partial t$ の定めるコホモロジー類

$$(\partial F(x,t)/\partial t)_{t=t_0}\in H^1(\Theta_{E(t_0)})$$

が正しい幾何学的な微分 $(\partial E(t)/\partial t)_{t=t_0}$ を与えることを示しました。ただし，$\Theta_{E(t_0)}$ は $E(t_0)$ の正則接束の断面の層を表し，$H^1(...)$ はコホモロジー群を表します。コホモロジー群は，ここでは，あるベクトル空間のことです。

一般に，コンパクトな複素多様体の変形族 $\{M(t)\}$ に対して $M(t)$ の位相構造は不変です。(小平-Spencer 1960) ここで，コンパクトというのは，球の表面やドーナツの表面のように，穴やほころびのない空間のことです。

ところで，大学１年の解析の講義に出てくる Taylor 級数を思い出してみます。ある関数 $F(z)$ を，収束する z の無限次の多項式として表すというのが，Taylor 級数です。もし２次以上の項がなければ，$F(z)=a+bz$ となって，簡単です。

定理 1 (小平-Nirenberg-Spencer1958/p.910) M をコンパクトな複素多様体とし，$H^2(\Theta_M)=0$ と仮定する。このとき，N 個の parameter $t_1, \cdots, t_N$ に依存したコンパクトな複素多様体の族 $\{M(t_1,\cdots,t_N)\}$ が存在して，どんな M の微少変形も $\{M(t_1\cdots t_N)\}$ のなかに同型なものがある。ただし，N は複素ベクトル空間 $H^1(\Theta_M)$ の次元，$M(0,\cdots,0)=M$。

$\partial M(t)/\partial t$ は一次の幾何学的微分です。そして，$H^2(\Theta_M)=0$ は Taylor 級数で２次以上の項がないという条件に相当し，定理１は，すべての変形 (幾何学的 Taylor 級数) が $H^1(\Theta_M)$(一次の微分) で決定されることを主張しています。

その後のあらゆる種類の変形理論を通じて，この形の定理は，応用上もっとも重要です。上の定理は，それらのすべての原形を与えている点で，歴史的にも，重要な意味を持っています。

複素２次元の単連結コンパクト複素多様体で，零点のない正則２次形式を持つものを K3 曲面といいます。この定義が難しくてわからないときは，単に K3 曲面という（数学的には，非常に面白い）特別な空間がある，とだけ理解してください。また，コンパクト２次元複素多様体は，今後，複素曲面ということにします。次の定理２は，定理１を用いて証明されます。

定理 2 (小平 1964/p.1389)
(1) すべての K3 曲面は変形で移りあう，従ってすべて位相同型。とくに，$\mathbf{P}^3$ の中の４次曲面 $x_0^4+x_1^4+x_2^4+x_3^4=0$ と位相同型。
(2) K3 曲面で代数的でないものがある。

K3 曲面のうち，一般のものは，眼に見えるように表そうとしても，方法がありません。しかし，定理２の (2) によって眼に見えないものの存在が保証されています。ところで，倉西は定理１を精密化して，次の定理を証明しました。

定理 3 (倉西 1973) M をコンパクト複素多様体とする。そのとき，複素ベクトル空間 $H^1(\Theta_M)$ の原点を含む部分集合 S 上に複素多様体の族 $\{M(t); t\in S\}$ が存在して，どんな M の微少変形も $\{M(t); t\in S\}$ のなかに同型なものがある。

説明を省略して書くと，S はつぎのように表わすことができます。

$$S=\left\{\phi(t)\in H^1(\Theta_M); \bar{\partial}\phi(t)=[\phi(t),\phi(t)]/2\right\}$$

この定理３はさらに Grauert により，特異点を持つコンパクトな解析空間にまで拡張されました。最近では，コンパクトな解析空間が，特異点を持たない多様体に変形できるための便利な十分条件も得られており (Friedman，並河-川又など)，新しい Calabi-Yau 多様体（K3 曲面の一般化）の例がこの十分条件を用いて構成されています。

小平-Spencer-Grauert の変形理論のひとつの美しい応用例は，孤立特異点の変形理論です。古典的な不変式論，Lie 環とその表現論が，特異点 (ADE) の変形理論を通じて，現代代数幾何学に出会ったと言っていいでしょう。

たとえば，$F=x^2+y^3+z^5$ として，$X=\{(x,y,z)\in \mathbf{C}^3; F=0\}$ とします。X は，原点 $(0,0,0)$ で特異点を持ちますが，原点近くでの変形は，F にいろいろな多項式を付け加

えて得られます。8 個の単項式

$$1,\ z,\ y,\ z^2,\ yz,\ z^3,\ yz^2,\ yz^3$$

を順に f_i $(i = 1, \cdots, 8)$ として，

$$F(x,y,z,t) = F + t_1 f_1 + \cdots + t_8 f_8$$

と定めれば，$F(x,y,z,t) = 0$ は X のすべての可能な変形を含みます。上の f_i は最も自然なものを選んでいます。 いま，変数 x,y,z の重みを 15, 10, 6 とすると，多項式 F の重みはちょうど 30 になります。この時，f_i も重みが決まりますから，$(t_i\text{の重み}) = 30 - (f_i\text{の重み})$ と決めます。t_i の重みは，簡単な計算で順に

$$30,\ 24,\ 20,\ 18,\ 14,\ 12,\ 8,\ 2$$

となります。これらの値は，(驚くべきことに, 一見無関係な) E_8 という例外型 Lie 環の Coxeter exponents という 8 個の不思議な整数の各々に，1 を加えたものになっています。これは，Brieskorn らの理論のほんの一部です。

この理論は最近，Mordell-Weil 格子の理論 (塩田 1989-1997 なお発展中) の中で，より精密な形で再構成されました。また，Mordell-Weil 格子の理論のひとつの応用として，E_8 の Weyl 群という非常に大きなガロア群 (位数 $2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$) を持つ代数方程式がすべて決定されています。このほか，多くの素晴しい結果が得られていますが，この理論の基本的なところでは，楕円曲面の理論 (小平 1963/p.1269) が用いられています。(楕円曲面については，浪川氏の解説を参照してください。)

3　写像の変形理論

このほか，重要なのが，(正則) 写像または，部分多様体の埋め込みの変形です。M というコンパクト複素多様体をひとつ固定し，$S(t)$ を M の部分多様体の族とします。たとえば，$E(t)$ は $\mathbf{P}^2$ の部分多様体の族です。$S(t)$ を複素多様体の族と思うこともできますが，それとは別に，埋め込みの仕方が変化していると考えて，$\partial S(t)/\partial t$ を考えることができます。(小平-Spencer1959/p.956)

正標数でも同様の理論を作り，埋め込みの写像 $\pi : S \to M$ の変形を考えることで，応用が増えます。実際，森重文 (1979/1982) はまず，M が Fano 多様体 ($\mathbf{P}^2$ を高次元へ拡張したもの) のとき，かってにとった曲線をもとに，正標数特有の技巧 (Frobenius 写像) と正標数の写像の変形理論によって，写像を変形し，曲線をついに折れるまで曲げて，標数 0 のときも含め有理曲線 $\mathbf{P}^1$ を構成しました。さらに，得られた有理曲線を，再び，写像の変形理論によって，次数のより低い有理曲線に分解しました。これが，森理論の核心部分です。この応用として，森重文は Hartshorne 予想を解決しました。森の方法は，有理曲線を構成する方法として多くの専門家に応用され，今では，Bend and Break（曲げて折る）という名前がついている程です。

4　剛性定理

変形理論というのは，変形が豊かに存在して始めて面白いわけですが，逆に変形しても，全然変化しない多様体があります。あるいは，もっと強く，多様な複素構造が許されないような（可微分) 多様体があります。

定理 4 Kähler 複素多様体が射影空間 $\mathbf{P}^n$ と位相同型ならば複素多様体としても同型。

n が奇数の時は [小平-Hirzebruch1958/p.744] によって証明され，n が偶数の時は，Yau により証明が完成されました (1977)。Kähler の条件がない場合は，$n = 2$ のとき Yau+宮岡 (1978 ころ)，または，Seiberg-Witten 理論 (5 節を参照) により解決，一般次元では未解決です。

定理 5 (Brieskorn1964) n が奇数の時，Kähler 複素多様体が射影空間 $\mathbf{P}^{n+1}$ の 2 次超曲面と位相同型ならば，複素多様体としても同型。

n が偶数のときは Brieskorn により部分的に証明されています。また，Kähler の条件を弱めて，3 次元で類似の定理が証明されています。(中村 1987/88+Kollár1991) また，変形の極限については，次の剛性定理が知られています。

定理 6 (Siu1991/Hwang1992) 射影空間 $\mathbf{P}^n$ （または，$\mathbf{P}^{n+1}$ の 2 次超曲面) の微小変形および変形の極限となる複素多様体は $\mathbf{P}^n$ （または，$\mathbf{P}^{n+1}$ の 2 次超曲面) に同型。

このほか，有界領域を普遍被覆とする多様体に位相同型な Kähler 多様体の，定理 4 に似た形の剛性定理も知られています (Mostow,Mok)。しかし，剛性定理は，その性格上あまり存在しないものなのでしょう，沢山はありません。

5 Donaldson 理論

小平 [1970/p.1596] は，つぎの定理 7 を適用して，K3 曲面とホモトピー同値な複素曲面を分類しました。ここで，M が M' にホモトピー同値というのは，M が連続的に M' に変形できることです。その中で本来の K3 曲面と異なるものを，ホモトピー K3 曲面と呼んで区別します。小平 [1970] はさらに，ホモトピー K3 曲面は K3 曲面に位相同型か？ あるいは，可微分同型か? (つまり，可微分写像で同一視できるか) という問題を提出しました。これはのちに，Freedman らによって解決されました (定理 8/定理 9)。

定理 7 (Whitehead1949) M, M' を単連結なコンパクト 4 次元多様体とする。つぎの条件は同値。
(1) M と M' がホモトピー同値。
(2) 交叉形式が一致する。

M の交叉形式というのは，M 上のいろいろな閉曲面の交点数から定まる，整数係数の対称行列のことです。

定理 8 (Freedman1982) 定理 7 の状況で，M の交叉形式が even (行列表示すると，対角成分は偶数) ならば，定理 7 の (1)(2) はつぎの (3) に同値。
(3) M と M' が位相同型。

系 ホモトピー K3 曲面は K3 曲面に位相同型。

ここで，Donaldson 理論についてほんのすこしだけ説明します。簡単のため，X を単連結な実 4 次元可微分多様体，$\mathcal{M}_X$ を X に付随したある空間の反自己双対接続 (一般化された微分，これをインスタントンと呼ぶ) のモジュライ空間とします。モジュライ空間というのは，この場合はインスタントンを全部集めた空間のことです。$A \in \mathcal{M}_X$ をひとつのインスタントン，$A + \alpha$ をその近くのインスタントンとしたとき，α は微分方程式

$$D_{A+}(\alpha) + [\alpha, \alpha]_+ = 0$$

を満たします。　こうして，$\mathcal{M}_X$ は局所的には，複素構造の変形空間によく似た形の微分方程式で記述されます。Atiyah-Singer-Hitchen は，(小平-Spencer-) 倉西による変形空間の研究の方法を適用して，$\mathcal{M}_X$ の研究を始めました。その後 Taubes,Uhlenbeck らの結果を用いて，Donaldson は $\mathcal{M}_X$ の構造を解明し，多くの重要な結果を導き，さらに Donaldson 多項式と呼ばれる可微分多様体の新しい不変量を発見しました。もしふたつの単連結な実 4 次元可微分多様体 X，X' の Donaldson 多項式が異なれば，X,X' は (向き付けを保って) 可微分同相にはなりません。この不変量はホモトピー K3 曲面をはじめ多くの複素曲面に適用されて，興味深い結果が証明されました。定理 9 のタイプの最初の重要な応用は Donaldson によりますが，本稿の話題とずれるので，割愛します。

定理 9 (Friedman-Morgan1988) ホモトピー K3 曲面は K3 曲面に可微分同相でない。

Friedman は Freedman とは別人で，誤植ではありません。つぎの定理は Donaldson の理論および，さらに最近の Seiberg-Witten 理論を適用して，Morgan-Qin ら多くの人によって証明されました (1994/95)。

定理 10 X を複素曲面とする。このとき，
(1) 多重種数 $P_m(X)$ は可微分同相不変量。
(2) 特に，小平次元は可微分同相不変量。
(3) 有理曲面に可微分同相な複素曲面は有理曲面に複素多様体として同型。

(3) は $\mathbf{P}^2$ の剛性定理を含みます。定理 10 の証明は，[小平 1967/p.1523] の一般型曲面の P_m の公式や複素曲面の分類に依存しています。また，定理 10 は飯高による曲面の $P_m(X)$ の変形不変性 (1969) の改良にもなっています。なお，多重種数 $P_m(X)$ については，宮岡氏の解説を参照してください。

以上，駆け足で，変形理論の広がりをご紹介したつもりですが，筆者の力不足で，分かりやすい原稿になりましたかどうか。ただ，お伝えしたかったことは，変形理論は，小平先生たちが直接その理論の中でなしとげたことも素晴しかったが，それと同時に，変形をそのようにとらえた，先生たちの考え方が，のちの数学者に測り知れない影響を与えているということです。変形理論は，自由に変形可能であったことにより，一層重要なものになったと言うことができます。小平先生のご冥福をお祈りしつつ，筆をおきます。