モジュライ空間

北海道大学　　中村　郁

1　Waringの問題

最近解決されたフェルマー予想によく似た面白い問題があります.

問題 1.1 n と N を固定して, 勝手な正の整数 A を正の整数 x_i $(i=1,\cdots,N)$ を用いて

$$A = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_N^n$$

と表せ. n を固定したとき, すべての A をこのように表示できるような最小の $N = N(n)$ を求めよ.

Waring という数学者が 1770 年に, 証明は発表しませんでしたが $N(2) = 4$, $N(3) = 9$ となると主張しました. それ以来この問題は Waring の問題と呼ばれていますが, 現在までに以下の事実が証明されています.

(1) $N(2) = 4$ (Lagrange 1770),
(2) $N(3) = 9$ (Wieferich, Kempner 1912),
(3) $N(5) = 37$ (Chen 1964).

これはこのままでは「モジュライ空間」とはあまり関係ありませんが, つぎのよく似た問題を考えます.

問題 1.2 正の数 n, d, N を選んで固定し, F_d を $\mathbf{C}$ 係数 n 変数 d 次同次多項式としこれも固定する. このとき同じ n 変数の 1 次式 $f_1,\cdots,f_N$ で関係式

$$F_d = f_1^d + f_2^d + \cdots + f_N^d$$

を満たすものはあるか? あるとすればどれほどあるか？ ただし $\mathbf{C}$ は複素数全体を表す.

この問題は 19 世紀後半にすでに考察されていますが完全には解かれていません. 面白い場合がきっとたくさん残っているはずです. F_d に対する解 $(f_1,\cdots,f_N)$ 全体のなす空間を $M(F_d,N)$ と表すことにします. $d=2, n=N=3$, $F_d = x^2+y^2+z^2$ の場合に「モジュライ空間」$M(x^2+y^2+z^2,3)$ は完全に分かります ([Mukai92]). これが典型的な「モジュライ空間」の例です.

平たく言えば, なにか面白そうなものをひとつ見つけたとしましょう. そのとき似たものを残らず全部探すというのが「モジュライの問題」です. 「似たもの」を全部集めた集合 (空間) が「モジュライ空間」で, 「似たもの」ひとつ一つが「モジュライ空間」の一つの点になります.

話をもとに戻して問題を整理しておきます.

問題 1.3 (1) ひとつ面白そうなもの (数学的対象) を見つけよ.
(2) それによく似たものはどれくらいあるか, その全体のなす空間 (モジュライ空間) はどんな様子をしているか.

ここでモジュライ (moduli) という言葉の語源についてすこし触れておきます. moduli はラテン語の modulus の複数形で測定の標準単位を意味します. ラテン語の modulus はギリシャ建築の柱の基底部の半径を基準とした尺度であった, という説もあります. この語感にふさわしい「モジュライ理論」の代表格は楕円曲線の理論です. その場合には, 基準の尺度とも言うべきモジュライ不変量 j があります. 現代的な理論にはそのような不変量を見つけるのが難しくなりました.

モジュライ空間の別の例をあげます. V を長さ 5 の横ベクトルのなす 5 次元複素ベクトル空間とします:

$$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5); x_i \in \mathbf{C}\}.$$

この V の中の 2 次元複素部分ベクトル空間 (以後 2 次元部分空間と言う) をすべて集めて

$$\mathrm{Gr}(5,2) = \{W \subset V; W \text{ は 2 次元部分空間 }\}$$

と定義します. この空間をグラスマン多様体と呼びます. これは「モジュライ空間」のひとつの例を与えます. つまり $\mathrm{Gr}(5,2)$ は V の中の 2 次元部分空間のなす「モジュライ空間」です.

$\mathrm{Gr}(5,2)$ の点 W は二つの横ベクトルで生成されますから, その二つの横ベクトルを並べた (2,5) 行列 P を用いて表わすことができます:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$$

もし行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が正則 (つまり逆行列を持つ) 場合には W の基底をとりかえて, (P を左基本変形でとりかえて)W を変えずに P を

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$$

の形にできます. P' が異なれば W も異なるので, $\mathrm{Gr}(5,2)$ という空間は $(a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{23}, a_{24}, a_{25})$ を座標とする 6 次元空間を含んでいます. $\mathrm{Gr}(5,2)$ は集合としては, P' のなす 6 次元空間に P' の極限をつけ加えたものです. なお, さきほどの向井のモジュライ空間 $M(x^2+y^2+z^2,3)$ は $\mathrm{Gr}(5,2)$ の部分集合として a_{ij} の 3 個の同次 2 次式の共通零点になっています [Mukai92].

このグラスマン多様体は比較的分かりやすい空間であるばかりでなく, いろいろなよい性質を持っています. たとえば, 勝手なふたつの V の 2 次元部分空間 W, W' があると, かならず正則な (逆行列を持つ) (5,5) 行列 A によって $W' = W \cdot A := \{vA; v \in W\}$ のように移すことができます. この事実を指して「$\mathrm{Gr}(5,2)$ は等質空間である」と言います. それ以外にもコンパクトである (閉じている, あるいが無限点列が収束する部分列をもつ, と言っても同じ) ということも $\mathrm{Gr}(5,2)$ の持つ良い性質と考えてよいでしょう.

哲学 1.4 「モジュライ空間」は良い性質を持つ.

哲学 1.5 「モジュライ空間」がコンパクトでない場合は, 「モジュライ空間」に点を少し加えてコンパクトな良い性質を持つ空間にできる.

2 曲線のモジュライ空間

曲線のモジュライ空間 M_g とは特異点を持たない曲線を全部集めたものですが, ただしここでとりあげる曲線というのは, コンパクトなリーマン面ないし射影的な代数曲線のことで実 2 次元です. 実 2 次元ですから曲線ではないことになりますが, 複素数を用いると 1 次元に見えますから習慣でそう呼んでいます. 曲線のモジュライ空間は, 種数 g という不変量によって $M_1, M_2, \cdots, M_g, \cdots$ というおのおの別々の空間に別れています. g が小さい場合には M_g はよく研究されていて, たとえば M_1 は

$$C_a : y^2 = x(x-1)(x-a) \quad (a \in \mathbf{C} \setminus \{0,1\})$$

という曲線 (の閉包)C_a からなる空間です. §1 でふれた楕円曲線とはこの C_a のことです. $a \in \mathbf{C}$ が異なると C_a も異なると思っていいので (正確にはレベル 2 構造を考えることにより), 空間 M_1 は $\mathbf{C} \setminus \{0,1\}$ となります. 同様に M_2 は

$$C_{a,b,c} : y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)$$
$$(a,b,c \in \mathbf{C} \setminus \{0,1\}, a \neq b, b \neq c, c \neq a)$$

という曲線 (の閉包) からなる空間と思ってそれほど違いはありません. ただし $g \geq 24$ では曲線を一斉にこんなに簡単に書くことはもうできません. これは空間 M_g ($g \geq 24$) が一般型の代数多様体であるという大域的な性質によるものです.

1969 年 Deligne-Mumford によって空間 M_g のコンパクト化 $\overline{M}_g$ が構成されました. その構成方法は, 当時生まれたばかりの「特異点の変形理論」や「代数的スタック」の理論を使う斬新なものでした. $\overline{M}_g$ は集合としては, M_g と M_g に属する曲線の比較的おだやかな極限をあわせたものです. $\overline{M}_g$ に属する曲線を種数 g の安定曲線と呼びます.

[Mumford83] は次の予想を提出しています：

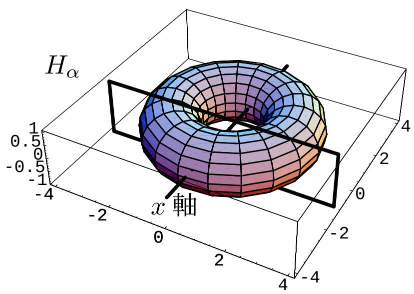
予想 2.1 (Mumford 予想) $\overline{M}_g$ を種数 g の安定曲線のモジュライ空間, κ_g を森田-Mumford 類, $H^*(M, \mathbf{Q}) := \lim_{g\to\infty} H^*(\overline{M}_g, \mathbf{Q})$ とすると, つぎの同型がある:

$$H^*(M, \mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Q}[\kappa_0, \kappa_1, \cdots, \kappa_g, \cdots]$$

これについては [Harer88] などの研究がありますが, 予想はまだ解決されていません.

1990 年以降理論物理学, とくに弦理論 (ひもの理論) によってモジュライ理論は大きな変化を遂げてきました. なぜひもの理論などに関係するのでしょうか? 曲線 C_a は実は空間としてはドーナツの表面

の形をしています．これを平面上に図のようにおいてみます．そして x 軸の下の方から x 軸に垂直な平面 $H_\alpha := \{x = \alpha\}$ を動かして，ドーナツの H_α による切り口を見ていきます．



そうすると，

(1) まず，1 点で接して，
(2) つぎにしばらく一つの閉じた円周 (これが閉じたひもです）になり，
(3) つぎにそのひもがくびれてふたつのひもになり，
(4) そのひもが別れて平行に移動して，
(5) またふたつがくっついて，
(6) くっついたところがゆるんで一つの閉じた円周に変化して，
(7) 最後に 1 点になり，そして消滅します (H_α とドーナツが交わらなくなる)．

閉じたひもが突然生まれ運動して別れたり消滅していく，その間にひもの描く軌跡がドーナツの表面 (コンパクトなリーマン面) になる，というわけです．ひもの理論は「『粒子』がひもの形をしていると仮定する」ことによって，物理学における 4 つの基本的な力，電磁気力，重力，弱い力，強い力を統一的に説明しようとするひとつの試みです．

Witten は理論物理で知られたいくつかの量子重力理論のなかで，位相的重力理論と行列模型がさまざまな点でよく似た理論であることをもとに，それらは同等な理論ではないか，と予想しました．Witten はさらにもしそうならば，重力理論の自由エネルギー F が KDV 方程式の解になると予想しました [Witten91]．

次数つきのベクトル空間に対しては母関数が定義されます．たとえば x_i の次数が i に等しいとき，多項式環 $\mathbf{C}[x_1, x_2]$ の母関数は，q を不定元として

$$\begin{aligned}(1+q+q^2+\cdots)&(1+q^2+q^4+\cdots)\\ &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)}\end{aligned}$$

となります．物理学では母関数によく似た分配関数 Z という概念があります．それは考えている理論のなかで可能な量子状態に重さをつけてべき級数の形にして得られる母関数を，理論の自然な要請ですこし修正したものです．自由エネルギー F は分配関数 Z を用いて $F = \log Z$ と表されます．

Witten の予想を数学の言葉に書き直せば，n 点を指定した曲線のモジュライ空間 $\overline{M}_{g,n}$ 上の『標準的な仮想的コホモロジー類』τ_d の交点数

$$\langle \tau_0^{n_0} \tau_1^{n_1} \tau_2^{n_2} \cdots \rangle$$

の間に無限個の漸化式が成立し，交点数を係数とする無限級数 F が KDV 方程式系という連立微分方程式系をみたすことになります．τ_d はさきほどの κ_d とは少し違います．

しかしその漸化式は種数 g と点の個数 n を動かしてはじめて成立するものですから，こういう原理的な発見なしに漸化式をすべて予測するのは大変困難なことで，数学者の想像をはるかに超えるものでした．Witten の予想はしかしすぐ [Kontsevich92] によって証明されました．

定理 2.2 (Kontsevich-Witten) τ_d を安定曲線のモジュライ空間上の『標準的な仮想的コホモロジー類』とし，λ, t_i を不定元，

$$\begin{aligned}F &= \sum_{g=0}^{\infty} \lambda^{2g-2} F_g\\ &= \sum_{g=0}^{\infty} \lambda^{2g-2} \sum_{\{n_i\}} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{t_i^{n_i}}{n_i!} \langle \tau_0^{n_0} \tau_1^{n_1} \tau_2^{n_2} \cdots \rangle \right),\end{aligned}$$

$$\langle\!\langle \tau_{k_1} \tau_{k_2} \cdots \tau_{k_n} \rangle\!\rangle = \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \frac{\partial}{\partial t_{k_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial t_{k_n}} F$$

とすると，F は KDV 方程式系 $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\begin{aligned}(2n+1)\lambda^{-2} \langle\!\langle \tau_n \tau_0^2 \rangle\!\rangle &= \langle\!\langle \tau_{n-1} \tau_0 \rangle\!\rangle \langle\!\langle \tau_0^3 \rangle\!\rangle\\ &\quad + 2 \langle\!\langle \tau_{n-1} \tau_0^2 \rangle\!\rangle \langle\!\langle \tau_0^2 \rangle\!\rangle + \frac{1}{4} \langle\!\langle \tau_{n-1} \tau_0^4 \rangle\!\rangle\end{aligned}$$

をみたす．

KDV 方程式系はヴィラソロ代数 $\{L_n\}$ を用いるともっと見通しのよい関係式

$$L_n Z = L_n \exp(F) = 0 \quad (n \geq -1)$$

に書き直せます．たとえば L_0 はつぎの式で与えられます．

$$L_0 = -\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i+1}{2} t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{1}{16}.$$

ところでこの定理の原理的な部分を理解するために, つぎのやさしい問題を考えてみましょう．

a_n という無限個の複素数が漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

を満たしたとします．このとき, t という変数をとって $E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ とおけば, E は微分方程式

$$\frac{dE(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = E(t)$$

を満たします．したがって

$$E(t) = a_0 e^t, \ a_n = a_0/n!$$

となることが分かります．これと同様なことが自由エネルギー F に対して起きているというわけです．同じ頃発見されたミラー対称性も同じ見方をすることができます．ミラー対称性については解説 [細野 99] を見てください．ここでひとつ基本的な問題をあげておきます．

問題 2.3 経路積分を数学的に正当化して (たとえばミラー対称性の場合, 経路積分を擬正則曲線のモジュライ空間上での積分として実行するものとして), 無限個のモジュライ空間上の無限個の漸化式をはじめとするすべての関係式を経路積分によって証明せよ．経路積分の方法を数学的な方法として正当化せよ．

ミラー対称性はそもそも (数学的には正確とはいえない) 経路積分を実行した結果発見されたものですから, こういう説明が与えられないと筆者にはどうも物足りない気がします．このほかに, ミラー対称性と Witten 予想を組み合わせたような江口-堀-Xiong 予想 (hep-th9703086) があります．この予想に相当するカラビ・ヤウ多様体の場合の予想はまだありません．この予想を立てるのも大変興味ある問題です．

3 無限個のモジュライ空間

この 10 年間のもうひとつの顕著な方向は, これもやはり物理に関連して発展してきたものですが, 中島啓による無限個の Quiver 多様体というモジュライ空間のコホモロジー群の構造に関する理論です．Quiver 多様体とは, 有限個のベクトル空間の間の準同型写像の組のうち「安定なもの」のなすモジュライ空間のことです．くわしくは解説 [中島 00] を見てください．なお Quiver は日本語ではエビラ (箙) といい, 矢を入れて背負ういれものを指します．

今度はコホモロジー類によって引き起こされるコホモロジー群への作用が, 無限個のモジュライ空間を考えることにより無限次元リイ環 (たとえばアファイン・リイ環) の表現を実現するというものです．

これも原理は無限個の $\overline{M}_g$ を考えることに通ずるものがあります．このようなモジュライ空間のコホモロジー群の母関数の保型性は Vafa-Witten によっても予想され,「S-双対性」と呼ばれています．Kac-Peterson の結果によれば, アファイン・リイ環の指標は適当に解釈することで保型性を持ちます．中島啓の仕事は, Kac-Peterson の指標のもとになる表現そのものをモジュライ空間の幾何学から構成した, という点で興味深いものです．

もっとも簡単な例はハイゼンベルグ代数の指標 (母関数) で, これは点のヒルベルト・スキーム $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ $(n \geq 0)$ のコホモロジー群から現れます．中島啓によるハイゼンベルグ代数加群の同型

$$\oplus_{n=0}^{\infty} H^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2), \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}[x_d \ (d = 1, 2, \cdots)]$$

があります．ただしここで x_d は次数 d の不定元を表します．ですからこの加群の指標 (母関数)χ は

$$\chi = \prod_{d=1}^{\infty} (1 - q^d)^{-1} = 1 + 2q^2 + 3q^3 + 3q^4 + \cdots$$

となります．このとき分配関数 Z は $q^{-1/24}\chi$ と等しく, S-双対性による母関数の保型性とは, Z の保型性, それは結局つぎの Δ 関数の保型性

$$\Delta(\tau) = q \prod_{d=1}^{\infty} (1 - q^d)^{24}, \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

つまりつぎの関係式:

$$\Delta(-1/\tau) = \tau^{12} \Delta(\tau)$$

と同等です．ここで τ は虚数部分が正であるような複素数を動きます．点のヒルベルト · スキームについては [中島 98], [中村 01] を見て下さい．

4　安定性とモジュライ空間

代数幾何学でモジュライ空間がコンパクトな場合は, すべて Mumford の幾何学的不変式論 (GIT) によっていると言っても過言ではありません．GIT の解説としては例えば [向井 99],[**?**] があります．GIT のひとつの重要な原理は,

哲学 4.1 コンパクトなモジュライ空間 (= モジュライ空間のコンパクト化) は「GIT-安定なもの」をすべて集めて得られる．

安定性は今後しばらく, 10 年などという短い間だけでなくもっとずっと永く, 重要な考察手段であり目標であり続けるでしょう．安定性はそれくらい代数幾何学の基本的な概念です．§2 で説明した安定曲線のもともとの定義は GIT-安定とは無関係ですが, にもかかわらず

定理 4.2 (Gieseker, Mumford)　安定曲線は「GIT-安定」である．逆も正しい．

次の定理も同じ哲学でコンパクトなモジュライ空間の例を与えます:

定理 4.3 (丸山, 竹本, Mumford)「GIT-準安定」なベクトル束のモジュライ空間はコンパクトである．「GIT-安定」なベクトル束だけではコンパクトとならない場合がある．

やや不正確であることを承知で感覚的な言い方をすると, 「GIT-安定なもの」とは『エネルギーが極小で安定した状態のようなもの』です．これまで理論物理学から生まれた重要なモジュライ空間のなかで代数幾何学的な翻訳ができる場合は, すべてこの感覚にそうものばかりです．物理的に観測できるものは『エネルギーが極小で安定した状態』であるはずですが, その『安定した状態』のモジュライ空間は, 「GIT-安定なもの」のモジュライ空間と一致すると予想されます．つぎの定理はその一例です:

定理 4.4 (Donaldson) コンパクトな複素 2 次元多様体 X の (下部構造としての可微分実 4 次元多様体) 上の自己双対ヤン · ミルズ接続 (で表されるインスタントンと呼ばれる場) のモジュライ空間は, X 上の階数 2 の「GIT-安定な」ベクトル束のモジュライ空間と一致する．

ソリトンが空間方向に粒子性を持った波を表すように、インスタントンとは時間方向に粒子性を持った (2,2) 行列で表示された電磁場のようなものです。Donaldson はさらに強く, X の単なるホモトピー不変量ではない, 可微分多様体としての不変量 (Donaldson 多項式) を与えています．この Donaldson 理論は, その後 Seiberg-Witten 理論によってさらに深められ, 可微分実 4 次元多様体について大変深い研究が現在も進んでいます．

ところで, 問題 1.3 の「面白そうなもの」というのは, すでにわれわれのまわりにはたくさんあるのかも知れません．代数幾何学の立場から言えば, たとえば, ファノ多様体, カラビ · ヤウ多様体や K3 曲面, アーベル多様体, あるいはベクトル束がそれです．若い人たちの勇気ある挑戦を期待しています．

参考文献

[Harer88] J. Harer, Lec. Notes Math. **1337**, 138-221, Springer, 1988.

[細野 99] 細野　忍, ミラー対称性, 数学 **51** (1999) 257-275.

[Kontsevich92] M. Kontsevich, Commun. Math. Phys. **147**, (1992) 1-23.

[Mukai92] S. Mukai, London Math. Soc. Lec. Note Ser., **179**, 255–263, Cambridge, 1992.

[向井 99] 向井　茂, モジュライ理論 2, 岩波書店, 1999.

[Mumford83] D. Mumford, Progr. Math., **36**, 271–328, Birkhäuser, 1983.

[中島 98] 中島　啓, 曲面上の Hilbert 概型と Heisenberg 代数, 数学 **50** (1998) 385-398.

[中島 00] 中島　啓, 箙多様体と量子アファイン環, 数学 **52** (2000) 337-359.

[中村 00]　中村　郁, モジュライと変形理論, 数学のたのしみ **20**, 38-53, 日本評論社, 2000.

[中村 01]　中村　郁, マッケイ対応とヒルベルトスキーム, 数学のたのしみ **28**, 60-75, 日本評論社, 2001.

[Witten91]　E. Witten, in Surveys in Diff. Geom. **1**, (1991) 243-310.