モジュライと変形理論

北海道大学　　中村　郁

1　談話室の小平先生

私の学生時代と言えば，米ソの宇宙開発競走の一方で，ベトナム戦争とりわけアメリカ軍の北爆が始まって，それが熾烈に続いていた時代であった。東大で言えば，小平先生が帰国され，ストライキ，全共闘の時計台闘争、そして入学試験の中止にまでいたるあの時代である。数学科のある理学部３号館が全共闘に封鎖される、いやそういうことを言うのは挑発だ，という議論があって，ともかくも大勢の学生が大学に泊り込んだのもその頃である。冬の大学の夜は冷え込みが厳しい。それに泊り込みと言っても，上に一枚下に一枚新聞紙が合計２枚，これだけでコンクリートの床の上に寝たのである。なにがしかの小競り合いがあり、いくらかのけが人がでた。そうして時計台の攻防戦があって入試が中止になって、長期のストライキも終わった。それからさらに半年後、私はなぜか (理由が思い出せない）ふたたび大学に泊まり込んでいた。やはり新聞紙２枚であった。夜中 12 時頃であったろうか，アポロ 11 号の月面着陸のニュースが流れた。アポロ計画の資料からすると昭和 44 年 7 月 20 日前後であったろう。

「ここは本当に素晴らしい。」

そのときのアームストロングの言葉である。人類の月面第一歩であった。

「アメリカ帝国主義の勝利かあー」、

誰かがそう言った。 そういう時代だった。

私が修士に進んだころは東大の代数幾何の土曜セミナーの盛んな時期であった。飯高さんが小平次元の理論を始めた頃で，飯高さんは土曜セミナーの講演を終えるころ，

「いろいろ問題があるけれどどれもみんな難しい」

というようなことを言った。小平先生が

「どんな問題がありますか？」

と質問されると，飯高さんはさらさらっと 10 くらい問題を挙げた。そのうちのいくつかは重要ということで懸賞金がついた。賞金の最高額は多重種数の変形不変性で，これは 10 万円だった。そのころ大学卒の初任給は５万円程度

だったからこれはかなりの金額なのだが，ということはとてもすぐに解けそうな気のする問題ではなかった。

当時は談話室が学生教官の両方にとってのたまり場で、同級生のなかでは常連は、岡本和夫、岡睦雄だったと思う。研究上の議論から雑談になり、あるいは始めから最後まで雑談で談話室にたむろする人は多かった。その頃談話室には三宅さんという中年過ぎのおばさんがいて、いつもお茶をいれてくれた。昔の小学校で言えば小使いさんのような人である。われわれ学生はお茶ばかりでなくお菓子もよくご馳走になった。あるとき

「明日の試験のあとケーキを食べたいな」

と言ったら、本当に試験の終わるころ買って待っていてくれたこともあった。三宅さんは気さくな人柄ということもあって、下宿生の相談相手兼家族代わりという役割を果たしていた。最近は定員削減の影響で，こういう人達が大学から姿を消してしまった。しかし、教育だ、研究だと言っても所詮は人間のすることである。仮に財政的には無駄のように見えても、こういう人間的なゆとりのある大学の方が長い目で見れば強いのだと思う。

修士１年のセミナーは物理学科から移ってきた赤尾君とふたりで，セミナーの最中小平先生はよく居眠りをしておられた。(実は私もセミナーでよく居眠りをする。）小平先生には実質的にはセミナーより談話室で教えていただいた。(私の勤務先には学生の出入りする談話室はない。私の学生はもしかしたら困っている？）談話室には黒板があった。この黒板では同級生のレポートの相談，コンパの打ち合わせから，大先生同士の議論まで何でもありだった。そうしてときどきは質問しなくても小平先生の方から

「この前のあれね、こうやると存在しないことわかりますよ。」

という具合に教えていただけるのだ。質問の解答を手書きのノートでいただいたこともある。こういう先生の弟子というのは得だと思う。話しが一段落すると「お茶を飲みに行きませんか」となって、当時理学部３号館の裏にあったアートコーヒーなどに行くのであった。小平先生の同級の後藤守邦先生が東大に来られたとき、私は小平先生から紹介されてそのころの私自身の研究についてこの黒板で説明したことがある。例によってモタモタやったのだが、どうも後藤先生はピンとこなかったようで、小平先生が説明し直してくださった。私より短い説明でずっとよく分かる説明であった。説明というのはこうするものかと感心して見ていた。小平先生の説明というのはいつも過不足なく分かりやすかった。手書きのノートもそうだった。

実のところ，教えていただいたことはこんなことにはとどまらなかった。いつだったか、談話室の三宅さんがしみじみとこう言ったことがある。

「あんなに熱心に学生の面倒見てらした小平先生見たことなかったわよ。あなた、幸せよ。」

この時期先生とお話していて賞金 10 万円の問題の反例ができていることが分かった。昭和 46 年 11 月のことで，小平先生が理学部長に就任されたばかりの頃である。その反例は問題に止めを刺すというのではなくて，対象を代数多様体に限るというような自然な仮定を課す必要がある，ということを示した点に意義があった。肯定的な解決ではないので（一般的な十分条件を見つけるほうがもっと価値があるということもある）賞金 10 万円の 10 分の 1 を小平先生と私の二人がもらうことになった。もっとも，小平先生に差し上げるのはおそれ多いということで私だけが半分の 5 千円をいただいた。そのころ育英会の奨学金は学部学生だと 1 ヵ月 8 千円であった。賞金は当時プリンストンに滞在中の飯高さんから航空便で届いた。

しかし上野さんとの共著の論文のおかげで賞金はさらに千円増えた。この共著の論文は賞金 3 千円の問題を解決したので，寄与が（ずっと）多かった上野さんは 2 千円を受け取り，盛んに

「何だか悪いな」

と言っていた。私は学生だったので遠慮なくいただいて澄ましていた。何に使ったかは覚えていない。その後宝くじを 2，3 度買ったことがあるが当たったことは一度もない。だから 6 千円はまぐれ当たりもいいところだったが，何かにつけ学生を励まそうということで，周りの先生たちがいろいろ考えて下さっているのが分かってありがたいと思った。こういう周囲の励ましがなかったら私はきっと予選落ちしていたのではないかと思う。実際当時は上と下の優秀な人々に囲まれて、私の気分は 9 回裏 2 死走者無し敗色濃厚、バッターボックスに立って今ツーストライク · ノーボールというところだったのだ。しかも同級生の赤尾君はものすごく優秀なひとで，私は始めからずっと圧倒され放しであった。彼は同級生というより，いつも質問に答えてくれる私のもうひとりの先生であった。

そうこうするうち，昭和 47 年 2 月には博士課程の面接試験があった。そのときの質問のひとつは，

「賞金は合計いくらもらったの？ どんな問題だったの？」

だった。もうひとつは

「どこか助手の口があったらどうしますか？」

で，聞かれたのはそれだけだった。小平先生もそのときの試験官のひとりで，ニコニコしながらなにかボソボソ話すと、他の先生たちと一緒に愉快そうに笑われた。体をゆするようにして、本当に愉快そうだった。それで面接試験は終わった。当時の面接試験というのはだいだいこんなもので，友人のもみんな似たり寄ったりだったらしい。卒業の近づいた 3 月，赤尾君は東大の助手に決まり，そのあと私は名古屋大学の助手に決まった。今より就職事情はずっとよかった。しかしそれにしても、私は最初の論文をまだ投稿すらして

いなかった。のんびりした時代だった。今の若い人たちには想像もつかないことだろう。

もうひとつ鮮明に覚えていることがある。たぶん学部長に就任されてから間もなくの頃だと思う，小平先生は一度もらされたことがある。

「この頃よく眠れなくて困るんです。」

やはりいろいろ大変だったのだろうと思う。昭和 48 年 4 月小平先生は理学部長を辞職された。その後お会いしたとき，

「どうも体の調子が悪いので，教授会で『辞めます』と言ったら辞めさせてくれました。」

そう話しておられた。

ところで飯高さんの問題の賞金のことだが、あれはきっともう時効だと思う。

2　モジュライとは何か

2 年半程前の小平邦彦追悼特集 (数学セミナー 97 年 12 月号) で変形理論を紹介したことがある。今読み返すと随分無謀なことをやっているのだが、それはそれなりの意味があると思うのでこの記事もその延長で考えて見たいと思う。97 年 12 月号の記事が変形理論の一応の概観を与えるものと考えてよいとすれば、この稿は重複を避けてやさしいものにしたいと思う。もしその記事もあわせて読んでいただけるのならそれに越したことはないが、前回の記事を前提にはしない。ここではモジュライ理論や小平-Spencer の変形理論の面白さを知りたいと思う高校生のために、少々簡単過ぎるような例から話を始めたい。

この稿で用いるモジュライという言葉は、数学的な対象を区別するための（測定すると言ってもよい）基準となるような量を漠然と指す。問題によってその量がはっきり指定できる場合もあればそうでない場合もある。この稿でははっきり指定できる場合のみ考える。モジュライとは、ラテン語の modulus の複数形 moduli の日本語読みである。正しくはモデュライとすべきであろう。モデュリイと発音するイギリス人もいる。今はもう死語になっているらしいが、辞書によれば弾性係数 (modulus of elasticity) のような用法がかつてあった。これだと modulus は係数あるいは率ということになる。これはわれわれが使う意味に近いが、ピッタリ同じとは言い難い。類似の言葉 (le) module のフランス語辞典による説明には、ラテン語の modulus が語源で測定の標準単位を意味する、とある。ギリシャ建築の柱の基底部の半径を基準とした尺度、などの説明もある。これが現在数学で使われるモジュライの語感にもっとも近い。英語の module もフランス語同様、測定の標準単位とい

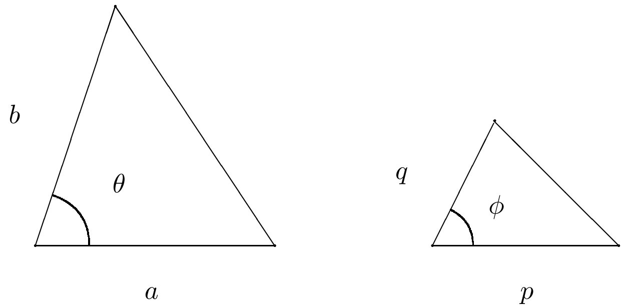

図 1: 3 角形

う意味になるが、数学ではモジュライの意味で使うことはなく、普通は加群と訳され意味が異なるので要注意。フランス語では (le) module はモジュライの意味にも加群の意味にも用いられる。

さて、いよいよ本論に入る。以下 $\mathbf{R}$ は実数の全体を表す。まず平面上の 3 角形を考えてみよう。まず 3 角形の辺と角に図 1 のように名前をつける。よく知られているように、2 辺挟角という 3 角形の合同条件がある。2 辺挟角とは、$(a, b, \theta) = (p, q, \phi)$ または、$(a, b, \theta) = (q, p, \phi)$ のとき、そのときにかぎって上のふたつの 3 角形が合同になるというものである。ここでは以下の議論を簡単にするために、

辺の順番を入れ替えてはいけない

ものとする。これは、3 角形を重ね合わせる時裏返してはいけない、と言ってもよい。以下、それぞれの 3 角形を $\Delta(a, b, \theta)$ と $\Delta(p, q, \phi)$ と表す。

したがって、

$$\Delta(a, b, \theta) \text{ と } \Delta(p, q, \phi) \text{ が合同} \iff (a, b, \theta) = (p, q, \phi).$$

このとき 3 つの正の量 (a, b, θ) $(a, b > 0, 0 < \theta < 180°)$ が、この場合のモジュライである。すなわち、これらの 3 つの正の量が一致すれば 3 角形は合同であり、またすべての組 (a, b, θ) にはひとつの 3 角形の合同類 (= ひとつの 3 角形に合同なものすべてを集めたもの）が定まる。これをまとめると、

$$\{3\text{ 角形の合同類 }\} \quad \cong \quad \{(a, b, \theta) \in \mathbf{R}^3; a, b, > 0, 0 < \theta < 180°\}.$$

3 辺相等という 3 角形の合同条件もある。それを上のように表すと、

$$\{3\text{ 角形の合同類 }\} \quad \cong \quad \left\{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3; \begin{matrix} a, b, c > 0, a + b > c \\ b + c > a, c + a > b \end{matrix}\right\}$$

右側のパラメーターを用いた表わし方は、上の場合のようにいろいろあり得る。余弦定理は c を a, b, θ によって表示する。すなわち、

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}.$$

このようにいろいろな表示の間の関係を探るのもモジュライの問題の重要な一部分である。3 角形の合同類のなす集合のことを

(3 角形の) モジュライ空間

と呼ぼう。 問題はまず、モジュライ空間を分かりやすく表示せよ、次に、表示によらないモジュライ空間の性質は何か？　このようないろいろな表示を貫く本質は何か？　モジュライの問題とはこういう問題のことである。

歴史上この種のモジュライの問題はどこまで遡ることができるであろうか？上のような表示を用いて幾何学的な問題を考える、ということ自身すでにわれわれがデカルトの著書『幾何学』に学んだ結果である。『幾何学』は 1637 年『方法序説』の一種の付録として出版された。ニュートンの生まれる 5 年前、江戸元禄時代をわずかに遡る。ニュートン (1642-1727) はこれを 22 才のとき半年あまりのうちに独力で読破し、一気に研究の先端に躍り出る。そして重大な発見の続く 2 年間 — ニュートンのアンニ · ミラビレス (驚異の年) は 1664 年の冬に始まる。ニュートンはたしかに『幾何学』によって近代的な数学的研究手段を獲得したのである。この『幾何学』は出版から 300 年以上も経た現在、ほんのわずかな綴りの違いを除いて現代フランス語の知識でそのまま読むことができる。平面幾何学に慣れ親しんだ者にはおおむね明解な叙述である。しかしそうは言っても当時はまだ『幾何学』は難解な書物であった。われわれが今デカルトの『幾何学』を理解できるのは、時代の恩恵である。(しかし、関孝和 (1639 or 1642-1708) を理解するのは残念ながら易しくない。)

『幾何学』の中には当然アポロニウスの仕事も紹介されている。アポロニウス (前 262 ?-?) の仕事とは円錐曲線の分類である。それはモジュライ理論のひとつのやさしい例を与えている。われわれはデカルトの『幾何学』によって簡略化されたアポロニウスを見ることにする。ただここで、アポロニウスがデカルトの『幾何学』を用いずに円錐曲線を考えなければならなかったことを忘れてはならないだろう。

まず、3 次元空間の中の円錐 (図 2) を考えよう。”デカルトに従って”座標を (x, y, z) とし、$a > 0$ をひとつ固定して円錐 C を

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = a^2z^2\}$$

とする。原点 $(0, 0, 0)$ の上下に二つの円錐が逆さまにつながっている。$z = h$ と固定すると、中心を $(0, 0, h)$ とする半径 $|ah|$ の円が平面 $z = h$ 上に定ま

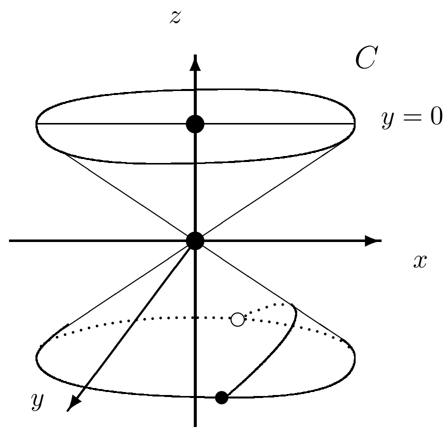

図 2: 円錐

る。一方、$y=0$ とすると C の関係式は

$$x^2 = a^2 z^2$$

となり、これは C と平面 $y=0$ の共通部分が二つの直線 $x=az$, $x=-az$ からなるという事実を示している。これを z 軸を中心に回転すると、もとの C が得られる。

ここで次の問題を考える。

> 円錐 C の平面による切り口は何か？ 空間の平行移動と回転によって重ね合せることのできるものは同一視して分類せよ。

例外的な場合をさけるため平面は原点 $(0,0,0)$ を通らないものとする。すなわち、平面の方程式を $z = sx + ty + u$ とすれば、$u \neq 0$ を仮定する。そのとき切り口は

$$z = sx + ty + u, \quad x^2 + y^2 = a^2(sx + ty + u)^2$$

となる。したがって、平面 $z = sx + ty + u$ を $x-y$ 平面に重ね合わせれば、切り口の方程式は

$$x^2 + y^2 = a^2(sx + ty + u)^2$$

となる。これを $x-y$ 平面の平行移動と回転の差を除いて分類すればよい。

切り口の定義方程式の 2 次式の部分 $px^2 + 2qxy + ry^2$ は、平面の回転によって $sx^2 + ty^2$ $(s, t \neq 0)$ または sx^2 $(s \neq 0)$ に直すことができる。(この

s, t は先程の s, t とは異なる。）次に係数 s, t の正負も考慮すると、平行移動によって切り口の定義式は次の 4 つのどれかになる。

$$sx^2 + ty^2 = 1 \quad (s, t > 0) \tag{1}$$
$$sx^2 - ty^2 = 1 \quad (s, t > 0) \tag{2}$$
$$y = rx^2 \qquad (r \neq 0) \tag{3}$$
$$sx^2 - ty^2 = 0 \quad (s, t > 0) \tag{4}$$

(4) は $u \neq 0$ の場合には起きないことがわかるので、$s = 1/a^2$, $t = 1/b^2$ などと書き直すと次の 3 つのどれかになる:

(1)' $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1 \quad (a, b > 0)$ (楕円)
(2)' $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1 \quad (a, b > 0)$ (双曲線)
(3)' $y = rx^2 \quad (r > 0)$ (放物線)

したがって切り口の分類は

$$\{\text{ 切り口の同値類 }\} = \{(1)'\} \cup \{(2)'\} \cup \{(3)'\}.$$

$\{(1)'\} \cong \{(a, b) \in \mathbf{R}^2; a, b > 0\}$,
$\{(2)'\} \cong \{(a, b) \in \mathbf{R}^2; a, b > 0\}$,
$\{(3)'\} \cong \{r \in \mathbf{R}; r > 0\}$.
ただし (1)' では、(a, b) と (b, a) は同一視

これがアポロニウスの円錐曲線論の核心である。ニュートン力学のひとつの結論は、これが太陽の周りをめぐる惑星の軌道の分類と一致する、ということである。紀元前 3 世紀当時、アポロニウスの円錐曲線論は趣味の数学という以上にどのような意味をもったのであろうか？ それが実に 1900 年という永い時間を経て、単にひとつの図形というにとどまらず、惑星や彗星の軌道として一層現実的な存在となったのである。この事実はこれから数学を志すひとにとっても励ましとなるものであろう。

数学におけるモジュライの問題というのは、複雑さこそ違えおおむねこういう問題である。問題は同値関係（同一視の規則) の設定に依存する。

3　2 次曲線

前節と少し異なるつぎの問題を考える:
3 変数の同次 2 次式

$$ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + 2px_0x_1 + 2qx_1x_2 + 2rx_2x_0$$

を以下の変数変換 $x_i \mapsto y_j$ (一次変換という) によって y_j の簡単な標準形に移せ。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ただし $\det(a_{ij}) \neq 0$.

最初の式で $x_0 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ とすれば前節の問題になる。今度は a_{ij} についた制限は $\det(a_{ij}) \neq 0$ だけなので、もう少し結論は単純になる。前節の分類結果を使うとまず 3 種類 (1)',(2)',(3)' になることが分かる。(1)' で $u = x$, $v = \sqrt{-1}y$ とすれば、(1)' は (2)' になること、さらに (2)' は $x^2 - y^2 = 1$ とできることもいいだろう。さらに (2)' で $u = x - y$, $v = x + y$ とすれば式は $uv = 1$ に変形される。したがって (1)'(2)' は

$$xy = 1$$

に帰着される。ここでもとの同次 2 次式に話しを戻すと、標準形は $x_0^2 - x_1x_2$ となる。一方、(3)' の式は $y = x^2$ に変形できるから、同次 2 次式の標準形で言えば $x_0x_2 - x_1^2$ となる。 $x_0^2 - x_1x_2$ と $x_0x_2 - x_1^2$ は変数の番号付けの差しかない。という訳で、これらはすべて同じ式に変形できることが分かる。除外した (4) の場合は x_0^2 または x_0x_1 となる。したがって上の問題の解答は次のようになる:

$$\text{標準形は} \quad x_0x_2 - x_1^2,\ x_0^2,\ x_0x_1\text{。}$$

言い換えれば、同次 2 次式で定義される集合 (曲線) は、直線を含まなければ、1 次変換によって

$$x_0x_2 - x_1^2 = 0 \tag{6}$$

と同一視される。これを曲線と呼ぶのは、たとえば、$x_0 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ として $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ の変わりに $y = x^2$ のほうを考えるからである。

以上のことから普通はこの円錐曲線はモジュライ理論の例として挙げられることはない。同値類には依存するパラメーターがなく、モジュライ空間が一点になってしまうからである。しかし、元来モジュライ理論とは、同値関係の設定のしかたに依存するものなので、前節のように円錐曲線の分類をひとつのモジュライ理論と見ても誤りではない。

ただここで一つ重要なことを注意しておく。(1)'(2)'(3)' はすべて (実 1 次元) 曲線を定める。しかしこの節で問題にした標準形 $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ が標準形として意味を持つためには、x_0, x_1, x_2 はすべて複素数でなければならな

い。ここで、複素数とは $a+b\sqrt{-1}$ (a,b : 実数) と表される数のことである。$u=x,\ v=\sqrt{-1}y$ という変換のもとでは、x,y が実数を動くとき、u は実数、v は純虚数を動く。もし x,y が複素数を動くとすれば、$u,\ v$ も複素数を動いて、二つの図形 (1)' と (2)' が同一視できるのである。(1)'(2)' の変数 x,y が実数だけを動いていたのでは同一視はできない。なお、$y=x^2$ という集合では、x は自由に複素数を動くことができる。複素数は実数部分と虚数部分を持つから、この集合は実 2 次元である。まとめると、

(1)'(2)'(3)' は実数で考え、実 1 次元、つまり本当に曲線。
(6) は複素数で考え、実 2 次元、つまり本当は曲面。

4　3 次曲線

ニュートンは (実)3 次曲線にも興味を持ち 58 通りの分類を得ている。今もケンブリッジ大学には彼の手稿が保存されている。それをここでモジュライ理論として紹介するにはあまりに複雑である。しかし、この 3 次曲線論も複素数で考えればちょうど手頃なサイズになる。 この節では複素数で 3 次曲線について論ずる。以下、$\mathbf{C}$ は複素数全体を、$\mathbf{Z}$ は整数全体を表す。複素数とは $a+b\sqrt{-1}$ (a,b : 実数) と表される数のことである。

2 次式の標準形を求める代わりに今度は

一次変換で移り合うものは同一視して、3 次式の標準形を求める

問題を考える。最も一般的なのは 3 次式で定義される曲線が特異点を持たない場合である。その場合に前と同様 $x_0=1,\ x_1=x,\ x_2=y$ とおけば、(テイトの) 標準形は

$$E: y^2+xy=x^3-\frac{36}{j-1728}\,x-\frac{1}{j-1728} \tag{7}$$

となる。ただし j はひとつの複素数で、$j\neq 0,1728$ とする. この式には少し馴染みの薄い人もいるかも知れない。もっとよく知られているワイエルストラスの標準形で書くと、

$$E: y^2=x^3-(c_4/48)x-c_6/864 \tag{8}$$

となる。3 次曲線 (8) に対して

$$j(E)=c_4^3/\Delta,\quad \Delta=(c_4^3-c_6^2)/1728 \tag{9}$$

と定める。(7) に対しては $j(E)=j$ と定める。このとき次の定理が成り立つ。

定理　　3 次曲線 E と E' が一次変換で移り合う $\Longleftrightarrow j(E)=j(E')$.

定理を上にあげた 2 種類の 3 次曲線に適用すると、もし $j = c_4^3/\Delta$ が成り立てば、曲線 (7) (8) は互いに一次変換で移り合う、ということになる。$j = 0$ および $j = 1728$ となる例はそれぞれ $c_4 = 0,\ c_6 \neq 0$ および $c_4 \neq 0,\ c_6 = 0$ として得られる。

以下、ふたつの 3 次曲線が一次変換 (5) で移り合うとき、それらを同型と呼び、ひとつの 3 次曲線 E に同型なもの全てからなる集合を E の同型類と言うことにする。定理により次が分かる。

$$\{\ \text{特異点を持たない 3 次曲線の同型類}\ \} \cong \{\ j \in \mathbf{C}\ \}$$

左辺を M で表す。ここでひとつ大切なことを注意しておきたい。この例のように適当な幾何学的対象 (この場合 3 次曲線) の同型類の集合が、それ自身代数多様体の構造を持つことである。$\{\ j \in \mathbf{C}\ \} \cong \mathbf{C}$ は最も易しい代数多様体の例である。一般には、モジュライ理論は単に同型類の集合をすべて集めてくるのではなく、同型類の集合がよい構造を持つ (たとえば、代数多様体の構造を持つ) ように、同型類を適当に限定して考察する理論である。

ところで、3 角形のモジュライ空間がふた通りに表示された（実は 2 角挟辺によってもうひとつある）のと同じように、3 次曲線のモジュライ空間 M ももうひとつの表示を持つ。その事実が昔から 3 次曲線のモジュライ理論を豊かにし、現在もなお数学者の関心をひく理由である。

z をひとつの複素変数、τ を虚数部分がゼロでないひとつの複素数として次のように関数を定義する。

$$x(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \{\frac{1}{(z - m\tau - n)^2} - \frac{1}{(m\tau + n)^2}\}$$

和は $(0, 0)$ 以外の全ての整数の組 (m, n) についてとる。z が $p\tau+q$ $(p, q \in \mathbf{Z})$ という無限個の点 (これを格子点と呼ぶ) 以外の点ならば、この無限和は収束して有限の値になる。さらに

$$y(z) = dx(z)/dz$$

とおくと、ある定数 g_2, g_3 が存在して

$$y(z)^2 = 4x(z)^3 - g_2x(z) - g_3$$

が成立する。大切な点は、$g_2,\ g_3$ が τ のみに依存して、z にはまったく依存しない定数だということである。

これが何を意味するのかもう少し丁寧に説明しよう。z が格子点以外の複素数を自由に動くとき、$(x(z), y(z))$ は曲線 $C(\tau)\ :\ y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ の上を動いて完全に覆い尽くす。τ の虚数部分 $\mathrm{Im}(\tau)$ がゼロでなければ (簡単のために $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ とする)、こうして一つの 3 次曲線 $C(\tau)$ が定まる。

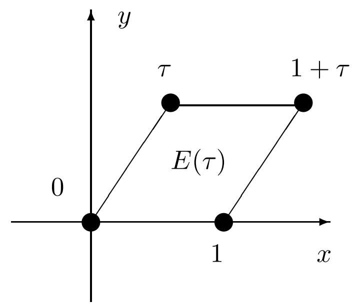

図 3: $E(\tau)$

一方、複素数 z を次のような平行移動

$$z \mapsto z + m\tau + n \ (m, n \in \mathbf{Z})$$

で同一視することによって、新しい空間 (リーマン面) $E(\tau)$ (図 3) を作る。複素数 z は平行移動で図 3 の平行 4 辺形の内部に移動することができる。したがって $E(\tau)$ というのは、図 3 で平行 4 辺形の向き合う辺をのり付けして得られる図形、つまり、ドーナツの表面である。この新しい $E(\tau)$ と先程の曲線 $C(\tau)$ は写像 $z \mapsto (x, y) = (x(z), y(z))$ によって同一視できる。

さらに次のこともわかる : $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ とすると、

$$C(\tau) = C(\tau')$$

ただし $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$. すなわち、$a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, $ad - bc = 1$. 従ってモジュライ空間 M は τ の空間ともみなすことができる:

$$M \cong \{\, j \in \mathbf{C} \,\} \cong \Big\{ \tau \in \mathbf{C}\,;\, \mathrm{Im}(\tau) > 0 \Big\} / \text{同一視} \tag{10}$$

ただし 右辺の τ の同一視は

$$\tau \ \mapsto \ \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}).$$

定数 g_2, g_3 は τ のみによって定まると述べた。つまり、g_2, g_3 は τ の関数である。$q = e^{2\pi\tau}$ として q の関数とみなすこともできて、$q = 0$ のときも g_2, g_3 はともに有限の値を持ち、それぞれ $4\pi^4/3$, $8\pi^6/27$ に等しい。これは

念のため書き直せば、次の等式 (11) を意味する。これはゼータ関数の特殊値といわれるもので、ここからは数論の壮大な理論が広がっていく。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{(2\pi)^4}{1440},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{(2\pi)^6}{60480}. \tag{11}$$

簡単のため $a_2=4\pi^4/3,\ a_4=8\pi^6/27$ として、 $E_4=g_2/a_2,\,E_6=g_3/a_3$ と取り直す。つまり $q=0$ のときに値が 1 になるように取り直す。すると、

> $E_4,\,E_6$ はある整数を係数とする q のべき級数であり、$E_4^3-E_6^2$ はきっかり 1728 で割り切れる。具体的には、
>
> $$E_4^3-E_6^2=1728\,q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \tag{12}$$

となることが分かる。j の定義 (9) において、Δ の分母に $1728\,(=12^3)$ があるのはこういう事情に基づいている。ここでひとつ不思議なことを指摘しておきたい。言うまでもなく、12 を割る素数は 2 と 3 である。体の標数が 2 または 3 の時には、$j(E)=c_4^3/\Delta$ という定義を適当に修正すると、第 4 節の定理はそのまま成立する。しかし、こういう理論の修正は標数が 2 または 3 の場合しか必要でない。そこで問題は:

> なぜ $E_4^3-E_6^2$ を割り切る 1728 という数字から理論の修正の必要な標数が分かるのだろう？

体の標数と書いたので、突然ブラックボックスに出会ったように思うひともいるだろう。そこで言い換えておこう。

> 1728 という数字が τ の世界から出て来て、これが出て来た世界である複素数をはみ出して、もっと広い (正標数 $2,3$ の) 世界での M の構造まで統制する。それは何故か？

これは、本当の理由はよく分かっていないのではないかと思う。こういうことを調べるのもモジュライの問題の別の大切な側面である。

モジュライ空間 M の 2 通りの表示 (10) の間の関係は次の式 (13) で与えられる。3 角形の余弦定理と比較すると随分難しくなることが分かる。

$$j=1728\frac{E_4^3}{E_4^3-E_6^2}=\frac{1}{q}+744+196884\,q+21493760\,q^2+\cdots \tag{13}$$

この無限級数 (13) についても実はたくさん不思議なことがある。これは本稿の主題とはなれ過ぎるので省略するが、有限単純群モンスターと深い関係がある。今度は 196884 や 21493760 など (13) の全ての展開係数の意味が明らかになるのである。

モジュライ理論というのは、複雑であるから面白いし、どこにつながるか分からないところが面白いとも言える。最も単純なはずの 3 次曲線の場合でさえ、これほどに豊かで意外な展開がある。

5 特異点の変形理論

曲線 (7) をもう一度思い出す:

$$E : y^2 + xy = x^3 - \frac{36}{j-1728}\,x - \frac{1}{j-1728}$$

これを $j=\infty$ の近くで考える。そのために $s=1/j$ として書き直すと、

$$E : y^2 + xy = x^3 - \frac{36\,s}{1-1728\,s}\,x - \frac{s}{1-1728\,s} \tag{14}$$

ここで $s=0$ とすると

$$E_\infty : y^2 + xy = x^3 \tag{15}$$

となるが、これは原点 $(x,y)=(0,0)$ で特異点を持つ。その様子は x, y に関して最低次の項を見ることで分かる。実際、最低次の項は y^2+xy で、これを $y^2+xy=0$ としたものは 2 本の直線に分かれ、もとの曲線の原点での様子を比較的正しく再現する。曲線 $y^2+xy=x^3$ の実数部分を図示すればおおよそ 図 4 のようになる。

E_∞ を $j\to\infty$ の極限と考えるのとは逆に、E_∞ を少し変形して E を作るという見方もできる。これが特異点の (微少) 変形ないし特異点を持つ空間の (微少) 変形である。x, y および s の絶対値が非常に小さいときは、新しい変数 u, v を

$$u = y + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+4x^6}),$$
$$v = (1-1728s)(y + \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2+4x^6}))/(1+36x)$$

と定めると、式 (14) は

$$uv + s = 0 \tag{16}$$

と同等になる。局所的には、$s=0$ の時は 2 本の直線（状のもの）$u=0$ と $v=0$ の合併で、$s\neq 0$ に対しては特異点のない曲線に変わっている。

ここまでは変形の例を与えただけである。それでは、$uv=0$ から出発して、微少変形 $uv=s$ を見つけるにはどうすればよいか、その問に答えるのが変形理論である。

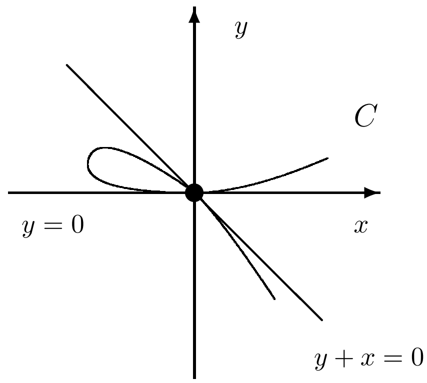

図 4: E_∞

一般に、$F(u,v)=0$ (ただし $F(0,0)=0$) が与えられているとき、

$$\mathbf{C}[u,v]/(F,\partial F/\partial u,\partial F/\partial v) \tag{17}$$

が微少変形の可能性の上限を与える、というのが変形理論のひとつの答えである。ここで集合 $F(u,v)=0$ は、$|u|,\ |v|<\varepsilon$ でのみ考える。ただし ε は 1 より小さな正の数を表す。ほかの記号の意味を説明する。$\mathbf{C}[u,v]$ は u,v の複素数係数多項式全体、$\partial F/\partial u,\ \partial F/\partial v$ はそれぞれ $u,\ v$ による偏微分、(17) は $\mathbf{C}[u,v]$ を $F,\partial F/\partial u,\ \partial F/\partial v$ の生成するイデアルで割った商加群を表す。商加群とは、$\mathbf{C}[u,v]$ の中で足し算や掛け算をするときに、$F,\ \partial F/\partial u,\ \partial F/\partial v$ はいつもゼロとみなすこと、という規則のもとで計算するのだと理解すればよい。割算はしないこと。

例として $F(u,v)=uv$ の場合を考えてみよう。係数がパラメータ s に依存するような $u,\ v$ の多項式 $G(u,v,s)$ を自由にとる。パラメータ s は $|s|<\varepsilon$ を動き、さらに $s=0$ の時は

$$G(u,v,0)=F(u,v)$$

と仮定する。集合 $G(u,v,s)=0$ も $|u|,\ |v|<\varepsilon$ で考えるものとする。ここでは $G(u,v,s)$ として簡単なものだけを考えることにする。例えば、

$$uv+suv=(1+s)uv$$

となるから、 $F(u,v)$ に suv などを足しても、$uv=0$ という零点集合は変化

がない (ので面白くない)。あるいは、

$$uv + su = u(v+s)$$

だから、これも $v=0$ が少し移動して $v+s=0$ となっただけで実質的に変化がない。以上のように考えると、(17) の分母の部分、つまり、F, $\partial F/\partial u$, $\partial F/\partial v$ の部分が、微少変形としては自明なものを与えることが分かるだろう。ふたつのパラメータ s, t を含んでも次の場合

$$uv + su + tv = (u+t)(v+s) - st$$

これは、平行移動すれば $uv - st$ と同等である。これは (16) において、パラメータ s の部分が $-st$ に変わったものである。ほかの多項式を選んでも上のどれかの場合にあてはまり、結局本質的な変化は (16) で尽くされている、というのが変形理論の結論である。念のため (17) を計算してみると、$\partial F/\partial u = v$, $\partial F/\partial v = u$ だから、 (17) は定数だけが残る。従って $F = uv$ ならば、

$$(17) = \{s \in \mathbf{C}\} \tag{18}$$

これを (16) のような式として解釈すればよいということになる。

この (17) がしばしばコホモロジー群などと呼ばれる（ふつうは説明を省略する）ところのものである。簡単に定義を説明することはできない。この (17) は、何を変形するかによって変わる。

もし $F(u,v) = u^2 + v^3$ ならば、(17) は 1 と v で生成される、つまり $s + tv$ $(s, t \in \mathbf{C})$ という元からなる。。そして $F(u,v) = 0$ の微少変形は、二つのパラメータに依存する曲線

$$u^2 + v^3 + s + tv = 0 \tag{19}$$

によって同型の差を除いて全ての可能性が尽くされる。

ここでは説明の都合上先に述べたが、この特異点の変形理論は、元来は小平-Spencer の変形理論から派生したものである。特異点の変形理論は、完全交差多様体の局所理論や代数曲線ならよく役に立つが、一般には複雑すぎるようである。

6　3 次曲線の変形理論

簡単に分かることだが、3 変数の同次 3 次式は以下の通り 10 個ある:

$$x_0^3,\ x_1^3,\ x_2^3,\ x_0x_1x_2,\ x_0^2x_1,\ x_1^2x_2,\ x_2^2x_0,\ x_0x_1^2,\ x_1x_2^2,\ x_2x_0^2.$$

$x_0 = 1,\, x_1 = x,\, x_2 = y$ とおけば、これらは

$$1,\ x^3,\ y^3,\ xy,\ x,\ x^2y,\ y^2,\ x^2,\ xy^2,\ y.$$

となる。これを一次変換で移るものは同一視すると、一次変換の持つパラメーターが 9 つあるから、$10-9=1$ で一つ残る。これで 3 次曲線のモジュライ空間が 1 次元であることは分かる。このひとつ残るものが、本質的に第 4 節の不変量 j に相当するわけだが、しかし第 4 節の定理のような精密な主張を得るのは別問題である。

小平-Spencer の変形理論とは何か？ 3 次曲線の場合に考えてみる。まず 3 次曲線をひとつとる:

$$E : H(x_0, x_1, x_2) = 0$$

$F(x_0, x_1, x_2) = 0$ をどう変えたら E の微少変形の可能性が尽くされるのか？ これは、前節と同様に微少変形のコホモロジー群を調べればよい。

答えを同次式によって表示すると、(17) と同様に記号の意味をとることで

$$\text{すべての同次 3 次式}/(x_i \partial H/\partial x_j)_{i,j=0,1,2} \tag{20}$$

となる。これは 1 次元である。(20) を代表するどんな元 h をとっても、

$$H + sh = 0 \tag{21}$$

は E の微少変形の可能性を尽くす。小平-Spencer の一般論は、3 次曲線の場合このようになる。代数多様体がひとつの同次式で定義される場合で、その変形理論が例外的なのは唯一 4 次曲面で、このときは、4 次式の枠をはみ出してしまい、(神様でも) 変形を具体的に書くことはできない。これ以外の場合には、微少変形は (19) (20) と (21) の類似物で与えられる。

7 変形理論

以上説明したことをもう一度別の言葉で整理すると、変形理論とは局所的なモジュライ理論のことである。したがって良いモジュライ理論があるためには、つまりよいモジュライ空間が存在するためには、良い変形理論がなければならない。代数曲線、アーベル多様体、K3 曲面のモジュライ理論が進んでいるのも、これらの場合には良い変形理論があるからである。

現代数学の主要な方法論の一つは、大域的なものを局所的なもののつなぎ合わせとして理解するということである。その意味でモジュライ理論を理解するためには変形理論が基礎となる。

モジュライ理論が一番都合よく進められる場合は、モジュライ空間が特異点を持たない場合である。この場合はモジュライ空間は局所的に一次近似によって理解できる。このとき、その局所的な一次近似は、微少変形を記述するコホモロジー群であると考えてよい。

小平-Spencer の理論がモジュライ理論の基礎というばかりでなく、小平-Spencer の理論の底にある考え方は、現在幅広い応用を示しつつある。それはすでに数学の基本的な考察手段となった感がある。例えば、群や代数の表現の変形は、数論、数理物理など、今後いろいろな分野で注目されていくであろうが、これは小平-Spencer の理論にはなかったものである。という以上に、現在われわれが出会う変形理論のほとんどは、本来の小平-Spencer の理論の中にはなかったものである。変形理論は必要性のゆえに、次々と研究者によって導入され拡大されてきたのである。これについては、数学セミナー 97 年 12 月号の記事を見ていただいた方がよいと思う。