放送大学面接授業

円周率はほぼ3.14である

北海道大学　　中村　郁

1　問題と目標

今年の東京大学の入試問題に，次のような問題が出題された：

問題　円周率 π は 3.05 より大きいことを証明せよ.

採点の労をいとわず，こういう試験問題が出題される限り，日本の教育にはまだ望みがある．これからもがんばれ，東大.

このノートでは，円周率 π の近似値を，簡単な計算で求めることを考えてみたい．内容は 2003 年 8 月の放送大学の北海道大学キャンパスでの筆者の連続講義 (面接授業) に基づいている．題して,「数学今昔物語」．バーコードや CT スキャンなど，いろいろな話をした．聴衆には，７０過ぎのお年よりもいたし，題名につられて，はるばる秋田から私の講義を聞きに来てくれた主婦もいた.

円周率 π の計算法はいろいろあるが，まず標準的なのは，円に内接する正多角形の辺の長さの総和を用いる方法である．これは下からの評価を与える．江戸時代の和算は，もっぱらこの方法によっているが，これに工夫を加えることで，建部賢弘は高い精度の近似値を得るのに成功した．井上ひさし「四千万歩の男」の第 4 分冊の「辛酉革命」という章に，円周率を求めた和算の記録がある．まずそれをながめてみよう．(表 1)

ここでは，大学の数学と高校の数学の中間の方法で，面積の計算しやすい「円の一部分」の面積を計算する．積分の計算を 2 回実行して，π を上からも下からもおさえる．だから π はこの二つの値の間にある，ということが分かる．結論は：

> 円周率 π はつぎの不等式を満たす：
> $3.1411542 < \pi < 3.1425488.$

書籍名	出版年	人名	πの近似値
諸勘分物	1622	百川治兵衛	3.2
割算書	1622	毛利重能	3.16
塵却記	1627	吉田光由	3.16
堅亥録	1639	今村知商	3.162
算俎	1663	松村茂清	3.1415926
算法根源記	1669	佐藤正興	3.142
算法至源記	1673	前田憲舒	3.1428
玉円極積	1696	古郡氏解	3.1416613
具応算法	1699	三宅賢隆	3.1415928
括要算法	1712	関孝和	3.14159265329
綴術算経		建部賢弘 (1664−1739)	3.141592653589 (小数点以下 42 桁)

表 1: 和算における π の記録

2　π の上からの評価

まず半径 1 の円を考える．この曲線の方程式は

$$x^2 + y^2 = 1$$

で与えられる．したがって，上半分は

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

という式で与えられる．したがって，積分を用いると円の 4 分の 1 の面積は

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$$

と表わされる．しかし, ここではこれは用いない.

そのかわりに，区間 $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ の上の面積

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}dx$$

を計算することを考える． 図で描くと 図 1 のようになる．3 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ を結んだものは正 3 角形であることに注意しよう．

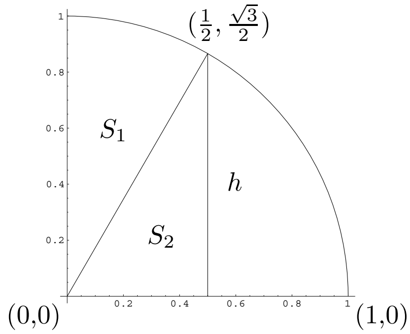

図 1: 扇形と三角形

図 1 の左側の扇形の面積を S_1， 右側の 3 角形の面積を S_2 とすると

$$S = S_1 + S_2$$

となる． まず S_2 を求める． 3 角形 S_2 の高さ h はピタゴラスの定理により

$$h^2 + (\frac{1}{2})^2 = (\text{円の半径})^2 = 1,$$

したがって

$$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

である． 次に S_1 の面積だが， S_2 は正 3 角形の左半分だから扇形 S_1 の中心角は $30°$，したがって

$$S_1 = \frac{30}{360} \times \pi = \frac{\pi}{12}$$

となる． したがって

$$S = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

となる．

次に別の方法で右辺の積分を計算する． このままでは難しいので，積分計算をもっと具体的に実行できるような簡単な関数によって，関数 $\sqrt{1-x^2}$ を上からおさえることを考える．

補題 1. つぎの不等式が成り立つ：

$$\sqrt{1-x^2} \leqq 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

この不等式は，テイラー展開を知っていれば自然に見つかるもので，不思議なものでは決してない．

証明. 証明のため，

$$g(u) = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2$$

とおく．このとき

$$\sqrt{1-u} \leqq 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 \quad (0 \leqq u \leqq 1).$$

を証明すればよい． $g(u)$ は u が増えるにしたがって減少する． したがって，$u = 1$ のとき，

$$g(1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} > 0$$

だから

$$g(u) \geqq 0 \quad (0 \leqq u \leqq 1)$$

である． そこで不等式を証明するには， 両辺を 2 乗して証明すればよい．

したがって

$$\begin{aligned}
g(u)^2 &= (1 - \frac{1}{2}u(1 + \frac{1}{4}u))^2 \\
&= 1 - u(1 + \frac{1}{4}u) + \frac{1}{4}u^2(1 + \frac{1}{4}u)^2 \\
&= 1 - u - \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}u^2(1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{16}u^2) \\
&= 1 - u + \frac{1}{8}u^3 + \frac{1}{64}u^4 \\
&\geqq 1 - u \qquad (0 \leqq u \leqq 1)
\end{aligned}$$

となる． 以上で補題が証明された． □

したがって，不等式

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx < \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4)dx$$

が成り立つ． 右辺の計算をしよう：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4)dx &= \left[x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{40}(\frac{1}{2})^5
\end{aligned}$$

したがって，第一の不等式は，

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} < \frac{1}{2} - \frac{1}{48} - \frac{1}{1280},$$
$$\pi < 6 - \frac{1}{4} - \frac{3}{320} - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

となる．ところで，

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &> 1.7320508, \\ &\quad (\text{ヒトナミニオゴレヤ}) \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} &> 2.5980762, \\ \frac{1}{4} &= 0.2500000, \\ \frac{3}{320} &= 0.0093750\end{aligned}$$

なので，

$$\pi < 6 - 2.8574512 = 3.1425488$$

となる．

3　π の下からの評価

次に，π を下からおさえることを考える．

補題 2.　$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のときは, 次の不等式も正しい：

$$\sqrt{1-x^2} \geqq 1 - \frac{1}{2}x^2 - \alpha_{\min}x^4$$

ただし，$\alpha_{\min} = 14 - 8\sqrt{3} = 0.14359353\cdots$.

この形の正しい不等式のうちで，$\alpha_{\min}$ は最も小さいもの，つまり不等式としては最良のものを選んである．証明はつぎの節で与える．

この不等式を用いて円周率 π の下からの評価を求めてみると，

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx \\ &> \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2 - \alpha_{\min}x^4)dx \\ &\geqq \left[x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{\alpha_{\min}}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &\geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{48} - \frac{1}{160}(14 - 8\sqrt{3}).\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\pi}{12} > \frac{1}{2} - \frac{1}{48} - \frac{14}{160} - \frac{3}{40}\sqrt{3}.$$

これを整理すると第二の不等式を得る：

$$\pi > \frac{1}{10}(47 - 9\sqrt{3}) > 3.1411542.$$

簡単な計算のわりには，比較的精度のよい近似値が得られていると言ってよいだろう．やさしい方法はやはり大切である．われわれの計算は前田憲舒 (1673) より少し良くて， 松村茂清 (1663), 三宅賢隆 (1699) よりは落ちる．もちろん関孝和や建部賢弘は別格である．上の計算から，ともあれ円周率 π はほぼ 3.14 であることがわかる．(しかし 3 ではない．)

4　補題 2 の証明

この節では補題 2，すなわち次の不等式

$$\sqrt{1-x^2} \geqq 1 - \frac{1}{2}x^2 - \alpha_{\min}x^4 \quad (0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}) \tag{1}$$

を証明する． ただし $\alpha_{\min} = 14 - 8\sqrt{3}$. 以下 $\alpha_{\min}$ の代わりに α を用いる．

前と同様に $u = x^2$ と置き換えて $0 \leqq u \leqq \frac{1}{4}$ の時, 次を証明すればよい．

$$1 - \frac{1}{2}u - \alpha u^2 \geqq 0 \tag{2}$$

$$\sqrt{1-u} \geqq 1 - \frac{1}{2}u - \alpha u^2 \geqq 0. \tag{3}$$

不等式 (2) が成り立つためには，$u = \frac{1}{4}$ の時に成り立てば十分で，したがって

$$\alpha \leqq 14 \tag{4}$$

ならばよい．

不等式 (2) が成り立つので，不等式 (3) を証明するには，次のことを証明すれば十分である：

$$(1 + 2\alpha u)^2 \leqq 8\alpha.$$

左辺は u の単調増加関数なので，$u = \frac{1}{4}$ の時，最大値をとる．したがって，次の不等式が成り立てばよい：

$$\alpha^2 - 28\alpha + 4 \leqq 0.$$

これより

$$14 - 8\sqrt{3} \leqq \alpha \leqq 14 + 8\sqrt{3}$$

となるが，この不等式と不等式 (4) を満たす最小の α は $\alpha_{\min}$ に他ならない． 以上で補題 2 が証明された．

5　関孝和の計算

ここで，関孝和の計算結果を見てみよう．これも井上ひさしの同じ本の同じ章にあるものを引用する．われわれの計算は，ほぼ正 128 角形に相当する．しかし正多角形の周の計算では，入試問題の解答となりうる正 8 角形の場合でさえ，$\sqrt{2-\sqrt{2}}$ を計算しなければならないので，少しわずらわしいようである．

h	正 h 角形の周の半分
8	3.06146745892
16	3.12144515225
32	3.13654849054
64	3.14033115695
128	3.14127725093
256	3.14151380114
512	3.14157294036
1024	3.14158772527
2048	3.14159142151
4096	3.14159234557
8192	3.14159257658
16384	3.14159263433
32768	3.14159264877
65536	3.14159265238
131072	3.141592653288 強

参考文献

井上ひさし，「四千万歩の男」 1, 2, 3, 4, 5, 講談社文庫.