マッケイ対応とヒルベルト・スキーム(訂正) 数学のたのしみ 2001年12月号

北海道大学　中村　郁

§2.3「McKay の発見」

話をもとに戻して, 表1の最初の列の6つの元 $e, -e, \cdots, \tau^3$ から成る集合を S とする. すでに見たように S は Γ の各共役類を代表する. 指標 χ_k は共役類の関数なので, 簡単のため χ_k を S 上の関数とみなしておこう. そこで関数 χ_k と χ_2 の積を S 上の関数として $\chi_0, \cdots, \chi_5$ までの和として表わすことを考える. (これは一般論によっていつも可能であることが分かっている.) たとえば

$$\chi_2^2 \text{ は } S \text{ 上　表の左から順に } 4, 4, 1, 1, 0, 0$$

という値をとる. これは $\chi_0 + \chi_1 + \chi_3$ がとる値に等しい. したがって

$$\chi_2^2 = \chi_0 + \chi_1 + \chi_3$$

が成り立つ. 同様に

$$\begin{aligned}
&\chi_0\chi_2 = \chi_1\chi_2 = \chi_2, \quad \chi_3\chi_2 = \chi_2 + \chi_4 + \chi_5\\
&\chi_4\chi_2 = \chi_3, \quad \chi_5\chi_2 = \chi_3
\end{aligned}$$

が確かめられる. これらの関係式から表現 ρ_i のテンソル積に関する関係が導かれる：

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \otimes \rho_{\mathrm{nat}} = \rho_0 + \rho_1 + \rho_3, \quad \rho_0 \otimes \rho_{\mathrm{nat}} = \rho_1 \otimes \rho_{\mathrm{nat}} = \rho_2,\\
&\rho_3 \otimes \rho_{\mathrm{nat}} = \rho_2 + \rho_4 + \rho_5, \quad \rho_4 \otimes \rho_{\mathrm{nat}} = \rho_3,\\
&\rho_5 \otimes \rho_{\mathrm{nat}} = \rho_3.
\end{aligned}$$