

日本数学会 春季総合分科会

マツカイ対応

Slodowy に捧ぐ

北海道大学理学部 中村 郁

於 日本大学 2005年3月29日

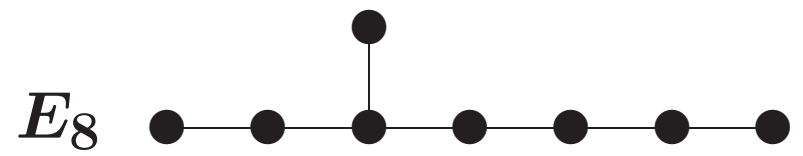
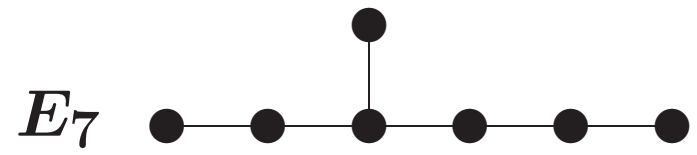
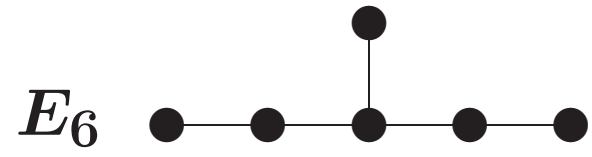
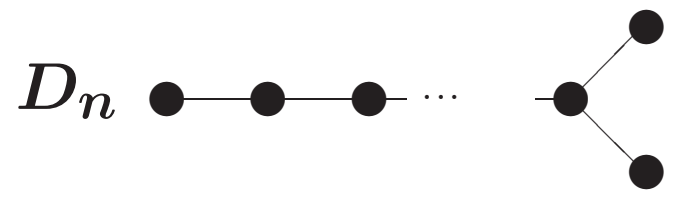
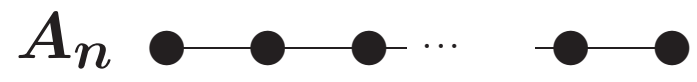
この原稿は新井仁之氏のホームページに
あるものを借用して作成しました。

新井仁之，新井しのぶ
両氏にお礼を申し上げます。

1 ディンキン図形とADE

ディンキン図形 ADE に関連して次が現れる：

- (0) ディンキン図形 ADE
- (1) $SL(2, C)$ の有限部分群, R^3 の正多面体群
- (2) 2次元超曲面の単純特異点, 変形で安定な臨界点
- (3) 単純リイ環 ADE, II_1 型因子環など“単純な”結合代数
- (4) $SL(2, Z)$ -不変な共形場理論の分配関数
- (5) 有限単純群フィッシャー F_{24} , ベビーモンスター B , モンスター M に関する McKay の観察 (E_6 , E_7 , E_8 が対応)



(4) $SL(2, \mathbb{Z})$ -不変な共形場理論の分配関数

だいたいの定義： $Z = \text{Tr } q^{L_0 + \bar{L}_0}$ ただし $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$

仮定

1. 真空はひとつ (最低エネルギー状態はひとつ)
2. χ_k は $A_1^{(1)}$ -指標, 物理系の素粒子 (作用素) に対応
3. 分配関数 Z は $A_1^{(1)}$ -指標の積 $\overline{\chi\chi'}$ の和
4. Z は $SL(2, \mathbb{Z})$ -不変, つまり, $\tau \mapsto -\tau^{-1}$ によって不変
(パラメーター $\tau \in \mathbb{H}$: 上半空間)

分類結果 : つぎの表の χ の指数が ADE の Coxeter 数と同じ

分類結果

Cappelli, Itzykson-Zuber, 加藤晃史

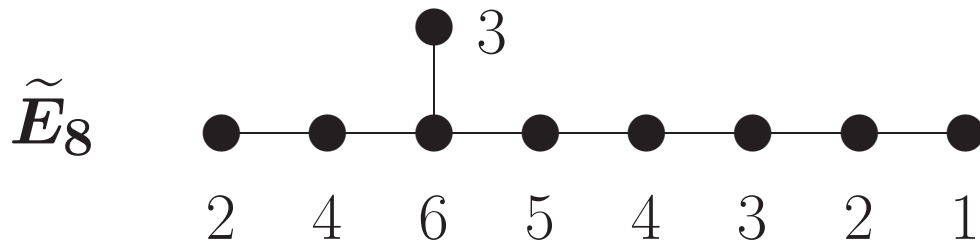
Type	$k + 2$	分配関数 $Z(q, \theta, \bar{q}, \bar{\theta})$
A_n	$n + 1$	$\sum_{\lambda=1}^n \chi_\lambda ^2$
D_{2r}	$4r - 2$	$\sum_{\lambda=1}^{r-1} \chi_{2\lambda-1} + \chi_{4r+1-2\lambda} ^2 + 2 \chi_{2r-1} ^2$
D_{2r+1}	$4r$	$\sum_{\lambda=1}^{2r} \chi_{2\lambda-1} ^2 + \sum_{\lambda=1}^{r-1} (\chi_{2\lambda}\bar{\chi}_{4r-2\lambda} + \bar{\chi}_{2\lambda}\chi_{4r-2\lambda}) + \chi_{2r} ^2$
E_6	12	$ \chi_1 + \chi_7 ^2 + \chi_4 + \chi_8 ^2 + \chi_5 + \chi_{11} ^2$
E_7	18	$ \chi_1 + \chi_{17} ^2 + \chi_5 + \chi_{13} ^2 + \chi_7 + \chi_{11} ^2 + \chi_9 ^2$ $+ (\chi_3 + \chi_{15})\bar{\chi}_9 + \chi_9(\bar{\chi}_3 + \bar{\chi}_{15})$
E_8	30	$ \chi_1 + \chi_{11} + \chi_{19} + \chi_{29} ^2 + \chi_7 + \chi_{13} + \chi_{17} + \chi_{23} ^2$

Type	分配関数 Z と Coxeter 指数
E_6	$ \chi_1 + \chi_7 ^2 + \chi_4 + \chi_8 ^2 + \chi_5 + \chi_{11} ^2$ <p style="text-align: center;">1, 4, 5, 7, 8, 11</p>
E_7	$ \chi_1 + \chi_{17} ^2 + \chi_5 + \chi_{13} ^2 + \chi_7 + \chi_{11} ^2 + \chi_9 ^2$ $+(\chi_3 + \chi_{15})\bar{\chi}_9 + \chi_9(\bar{\chi}_3 + \bar{\chi}_{15})$ <p style="text-align: center;">1, 5, 7, 9, 11, 13, 17</p>
E_8	$ \chi_1 + \chi_{11} + \chi_{19} + \chi_{29} ^2 + \chi_7 + \chi_{13} + \chi_{17} + \chi_{23} ^2$ <p style="text-align: center;">1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29</p>

(5) McKay の3個目のobservation

単純群モンスター M の位数2の元の共役類は2つ. 片方の共役類 (Fisher involution) に着目, 元 a, b をとる.

1. 積 ab の位数は1, 2, 3, 4, 5, 6のどれか.
2. さらにFisher involutionをいろいろ動かしたとき, 積 ab の M における共役類は合計9個
3. 積 ab の位数 : 拡大 E_8 の重複度の分布と同じ



今日の話

McKay 対応 $(1) \implies (0)$

McKay 対応の説明 (伊藤-中村) $(1) \implies (0) + (2)$

群軌道のヒルベルトスキーム $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$, $G \subset \text{SL}(2)$

復習：

(0) ディンキン図形 ADE

(1) $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群

(2) 2次元超曲面の単純特異点 (の特異点解消)

(3) 単純リイ環 ADE

以前から知られていた自明なこと

1. 有限群から特異点 : $(1) \implies (2)$ (やさしい)
 2. 特異点からディンキン図形 : $(2) \implies (0)$
-

復習 :

- (0) ディンキン図形 ADE
- (1) $SL(2, C)$ の有限部分群
- (2) 2次元超曲面の単純特異点 (の特異点解消)
- (3) 単純リイ環 ADE

以前から知られていたが、自明でないこと

1. リー環から特異点 : $(3) \implies (2)$

Grothendieck, Brieskorn, Slodowy

2. 有限群からディンキン図形 : $(1) \implies (0)$ (McKay 対応)

3. McKay 対応の説明 : $(1) + (2) \implies (0) + (2)$

ベクトル束とチャーン類 (Gonzalez-Sprinberg, Verdier)

今日の話 McKay 対応の説明 (伊藤-中村) $(1) \implies (0) + (2)$

群軌道のヒルベルトスキーム $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$, $G \subset \text{SL}(2)$

もっと最近の進展

話題(4) : 河東など (Ann. Math.)

話題(5) : Conway, 宮本雅彦 , Lam-山田-山内

最近のニュース

John McKay が2003年のCRM-Fields-PIMS
(Canada 数学会のもっとも権威ある賞) を受賞 .

受賞理由 : 重要な二つの貢献 , McKay 対応と

Monster に関する McKay observation .

McKay の手紙

- 「ムーンシャインに関する発見は1978年11月の最初の週だった。 そのころ Fischer 一家がモンリオールの私を訪ねてきたので、当時Fischerとともにプリンストンに滞在中のThompson あてに(それについて書いた)手紙を託した。 私はまだモンスターの指標表を見てはいなかった。」
- 周囲の反応： You are reading tea leaves.
- 「マッカイ対応の発見は78年末だったと思う。」
- (5)の発見は「たぶん1979年2月だ。」

最初の発見のあとMcKayはFischerらの計算したモンスターの指標表を見る。モンスターは1979年から1980年にかけてGriessによって構成された。

年表

1978.11	ムーンシャイン
—	モンスターの指標表 (Fisher-Thompson)
1978.12	マックイ対応
1979.02	(5)の発見
—	モンスターの構成 (Griess)

3次元McKay対応-その後の進展

$G \subset \mathrm{SL}(3)$, $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)$ に限ると ,

1. Smoothness— G 可換 : 中村
2. Smoothness と 3次元McKay対応 (G 可換 : 伊藤-中島 ,
 G 一般 : Bridgeland-King-Reid)
3. $G\text{-Hilb}$ の構造— G 可換 : 中村 , Craw-Reid
4. $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)$ の仲間 M_θ の構造— G 可換 : Craw-石井亮
5. $G\text{-Hilb}$ の構造など— G 非可換 : 五味-中村-筱田

今日の話

McKay 対応 $(1) \implies (0)$

McKay 対応の説明 (伊藤-中村) $(1) \implies (0) + (2)$

群軌道のヒルベルトスキーム $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$, $G \subset \text{SL}(2)$

復習：

(0) ディンキン図形 ADE

(1) $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群

(2) 2次元超曲面の単純特異点 (の特異点解消)

2 復習 : マツカイ対応とは何か？

例 1

G は 2 変数 2 面体群 $G(D_5)$, 位数 12

G は二つの元 σ, τ で生成される :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{及び} \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

表現	指標	e	$-e$	σ	σ^2	τ	τ^3
ρ_0	χ_0	1	1	1	1	1	1
ρ_1	χ_1	1	1	1	1	-1	-1
ρ_2	χ_2	2	-2	1	-1	0	0
ρ_3	χ_3	2	2	-1	-1	0	0
ρ_4	χ_4	1	-1	-1	1	i	$-i$
ρ_5	χ_5	1	-1	-1	1	$-i$	i

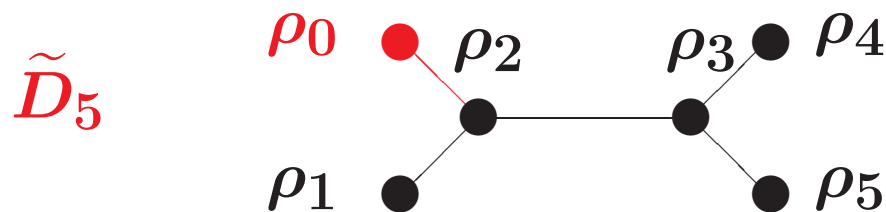
$\rho_{\text{nat}} : G \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$ とする .

このとき , 表現 ρ_i のテンソル積に関する関係 :

$$\rho_2 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_0 + \rho_1 + \rho_3, \quad \rho_0 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_1 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_2,$$

$$\rho_3 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_2 + \rho_4 + \rho_5, \quad \rho_4 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_3,$$

$$\rho_5 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_3. \quad \boxed{\text{これをグラフで表す}}$$



規則 : ρ_i と ρ_j を結ぶ $\iff \rho_i \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_j + \dots$

ρ_0 (自明な表現) を除くと , 普通のディンキン図形

例 2 (続き)

G は 2 変数 2 面体群 $G(D_5)$, 位数 12

G は二つの元 σ, τ で生成される :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{及び} \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

商空間 \mathbb{C}^2/G はただひとつ特異点をもつ

$G(D_5)$ の不変式とその関係式は

$$F = x^6 + y^6, G = x^2y^2, H = xy(x^6 - y^6)$$

$$G^4 - GF^2 + H^2 = 0$$

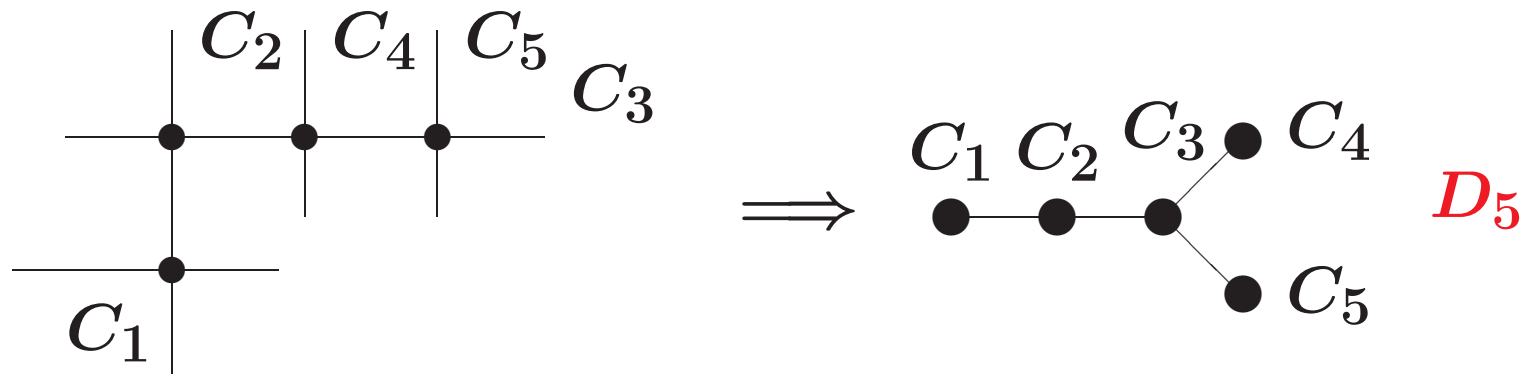
$G(D_5)$ の不変式とその関係式は

$$G^4 - GF^2 + H^2 = 0$$

普通の D_5 の式は $X^4 + XY^2 + Z^2 = 0$

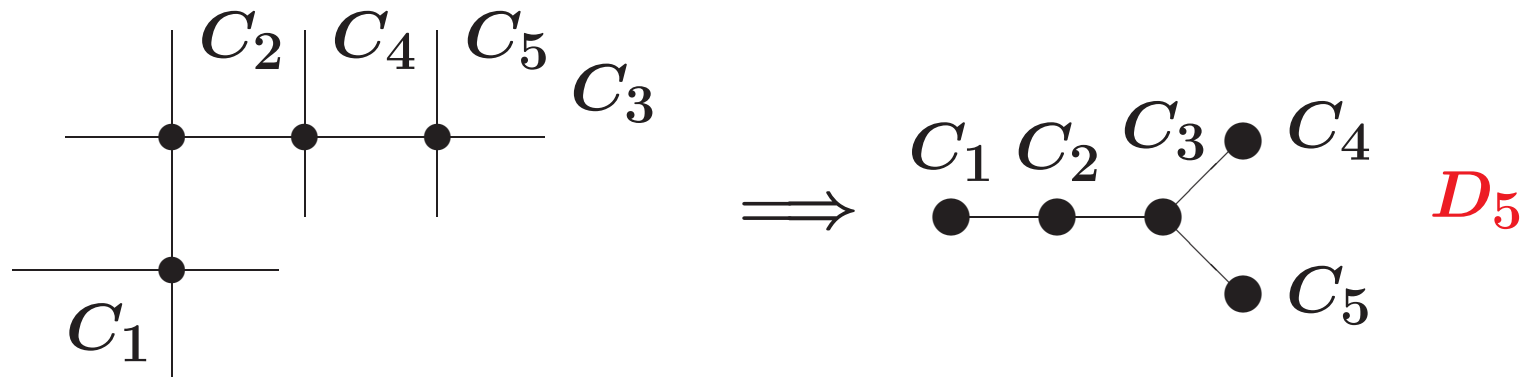
ただひとつ特異点 $(F, G, H) = (0, 0, 0)$ をもつ

この超曲面の特異点 $(0, 0, 0)$ の例外集合.



C_i は射影直線, 射影直線同士が 1 点で交差

この超曲面の特異点 $(0, 0, 0)$ の例外集合.



C_i は射影直線

2つの線分の交わり：射影直線が1点で交差

この図形の変換図形は、ディンキン図形 D_5

変換図形の規則： C_i は黒丸、 C_i の交差 = 黒丸を結ぶ線分

結論：二つのディンキン図形は一致する

(マッカーイ対応)

マッカイ対応の主張すること：
 C^2/G の特異点解消と G の表現論には関係がある

例 3 (続き)

G は 2 変数 2 面体群 $G(D_5)$, 位数 12

G は二つの元 σ, τ で生成される :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{及び} \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

商空間 \mathbb{C}^2/G はただひとつ特異点をもつ

$G(D_5)$ の不変式とその関係式は

$$F = x^6 + y^6, G = x^2y^2, H = xy(x^6 - y^6)$$

$$G^4 - GF^2 + H^2 = 0$$

$G(D_5)$ の不変式とその関係式は

$$G^4 - GF^2 + H^2 = 0$$

普通の D_5 の式は $X^4 + XY^2 + Z^2 = 0$

ただひとつ特異点 $(F, G, H) = (0, 0, 0)$ をもつ

特異点を解消するとき, $H/G = \frac{(x^6 - y^6)}{xy}$ などの商をとる.

この分母分子はもはや不変式ではない

しかし, $xy, x^6 - y^6$ は G の同じ表現を定める.

だから, 特異点解消と G の表現論には関係がある

3 アイディア：単純特異点の新しい特異点解消

\mathbb{C}^2/G をあえてモジュライ空間とみなす

$\mathbb{C}^2/G = \{12\text{点からなる } G\text{-不変な集合}\}$

：幾何学的な『 G -軌道』のモジュライ

その特異点解消：(環論的な『 G -軌道』のモジュライ)

$G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2) := \{\text{長さ12の } O_{\mathbb{C}^2}\text{-}G\text{-加群}\}$

加群 $M \in G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ に対して

$0 \rightarrow I \rightarrow O_{\mathbb{C}^2} \rightarrow M \rightarrow 0$ (完全)

イデアル I の生成 G -加群は, ほぼ G -既約.

I の生成元の例 : $F = xy - t(x^6 - y^6)$

4 n 点のヒルベルトスキーム

空間 X の n 点のヒルベルトスキーム

空間 X の n 点：順序を無視した n 個の点のこと. 重複も許す.

n 点 Z とは形式和 (ただし $n = n_1 + \cdots + n_r$)

$$Z = n_1 P_1 + n_2 P_2 + \cdots + n_r P_r \quad (P_i \neq P_j)$$

例 4 空間 $X = \mathbb{C}$ の場合, $P_i : x = \alpha_i$ とすると,

Z のイデアル $I_Z = f_Z \cdot \mathbb{C}[x] \iff Z$ は関数 $f_Z(x)$ の零点集合.

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= (x - \alpha_1)^{n_1} (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r} \\ &= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \end{aligned}$$

Z が n 点 $\overset{\text{同値}}{\iff}$ イデアル I_Z が $\mathbb{C}[x]$ の中で余次元 n .

たとえば, $Z = \text{原点の} n \text{倍}$ とすれば $f_Z = x^n$.

空間 $X = \mathbb{C}$ の場合

$$\begin{aligned} \text{Hilb}^n(\mathbb{C}) &= \{X \text{ の } n \text{ 点全体}\} \\ &= \{x \text{ の } n \text{ 次式全体, } x^n \text{ の係数 } 1\} \\ &= \left\{ x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j; a_j \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

例 5 空間 X が \mathbb{C}^2 の場合

$$Z = n_1 P_1 + \cdots + n_r P_r, \quad (\text{形式和}), \quad P_i \neq P_j$$

形式和, つまり

$$Z \in X \underbrace{\times \cdots \times}_n X / (\text{順序を無視}) = X^{(n)}$$

$$X^{(n)} = X \underbrace{\times \cdots \times}_n X / S_n$$

となる. $X^{(n)}$ は特異点をたくさん持つ.

警告: この $X^{(n)}$ は $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ とは異なる.

つぎに, $X^{[n]} = \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$.

$$X^{[n]} = \left\{ \begin{array}{l} I \subset \mathbb{C}[x, y]; I \text{ はイデアル} \\ \mathbb{C}[x, y] \text{ での余次元が } n \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} I \subset \mathbb{C}[x, y]; I \text{ は部分ベクトル空間で} \\ xI \subset I, yI \subset I, \\ \dim \mathbb{C}[x, y]/I = n \end{array} \right\}$$

定理 1 (Fogarty 1968) $X = \mathbb{C}^2$ とする.

このとき $X^{[n]}$ は $X^{(n)}$ の特異点解消となる.

写像 $\pi : X^{[n]} \rightarrow X^{(n)}$ は点 P_1, \dots, P_r を Z の台としたとき,

$$\pi : Z \mapsto n_1 P_1 + \dots + n_r P_r$$

として定義される. ただし $n_i = Z$ の P_i での重複度 (この定義は省略).

定理 2 (Fogarty 1968)(再述)

自然な射 $X^{[N]} = \text{Hilb}^N(\mathbb{C}^2) \rightarrow X^{(N)}$ は(最小)特異点解消.

$G \subset \text{SL}(2)$, $N = |G|$ のとき,

G の固定点集合の間の写像ができる:

$$\pi^{G\text{-不変}} : (X^{[N]})^{G\text{-不変}} \rightarrow (X^{(N)})^{G\text{-不変}}$$

Fogarty の定理によって $(X^{[N]})^{G\text{-不変}}$ も特異点がない.

上の定理の G -不変部分 = つぎの定理

5 G -軌道のヒルベルト・スキーム

補題 3 $(X^{(N)})^{G\text{-不変}} = C^2/G.$

定義 4 $G\text{-Hilb}(C^2) := (X^{[N]})^{G\text{-不変}}$

$G\text{-Hilb}(C^2)$ を「 G -軌道のヒルベルト・スキーム」という.

$I \in G\text{-Hilb}(C^2)$ ならば $C[x, y]/I = C[G]$: 正則表現

定理 5 (伊藤-中村 1999)

$G\text{-Hilb}(C^2)$ は (表現論的な) C^2/G の最小特異点解消.

定理 6 (伊藤-中村 1999)

G -Hilb(C^2) は (表現論的な) C^2/G の最小特異点解消.

この定理はマッカーイ対応の新しい説明を与える

「ディンキン図形 (の頂点)」

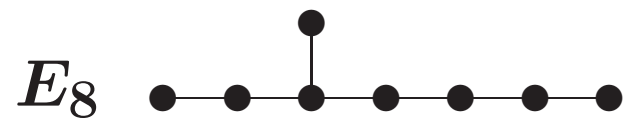
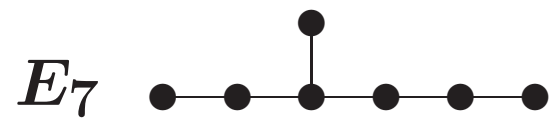
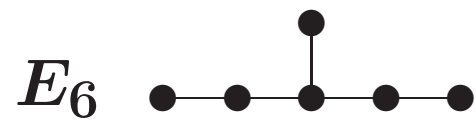
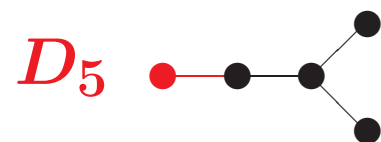
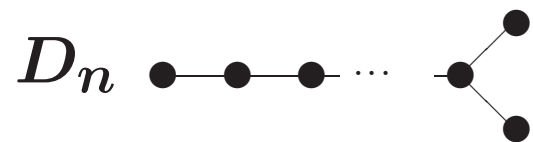
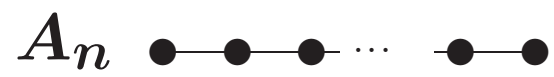
⇕ (1対1対応)

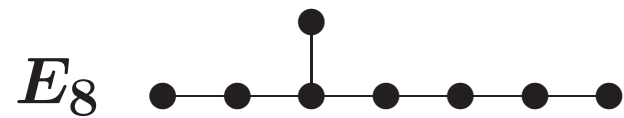
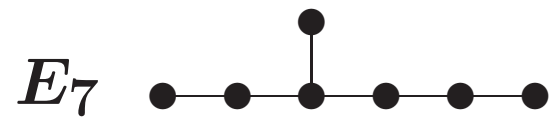
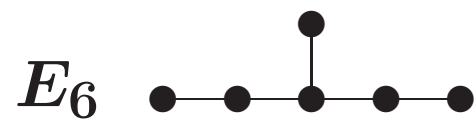
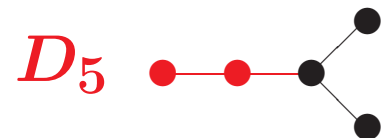
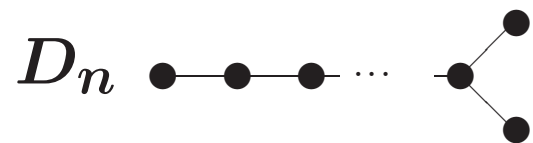
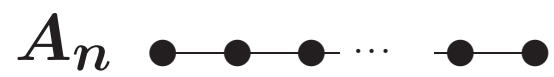
「例外集合の既約成分」

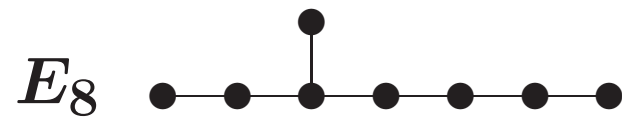
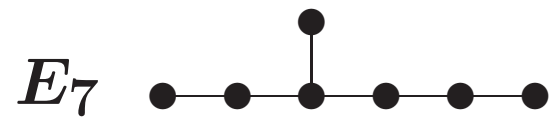
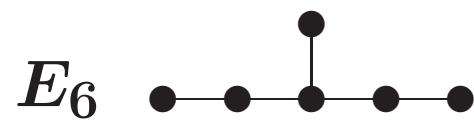
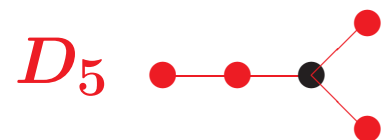
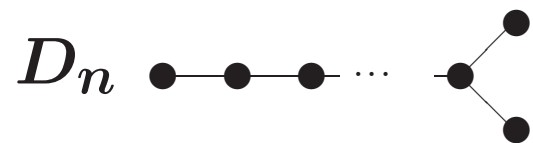
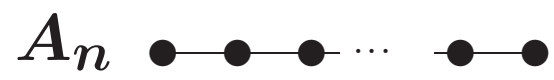
(1対1対応) ⇕ (マッカーイ対応)

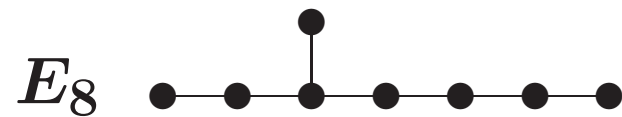
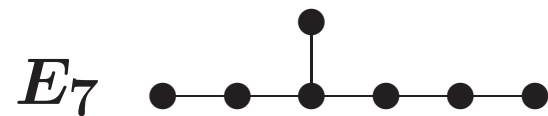
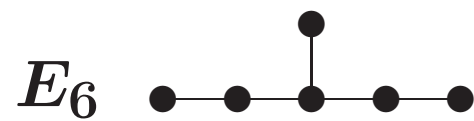
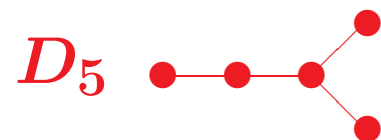
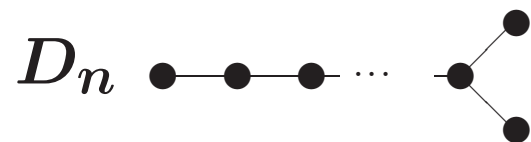
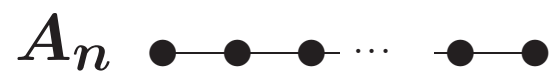
「 G の既約表現 (\neq 単位表現) の同値類」

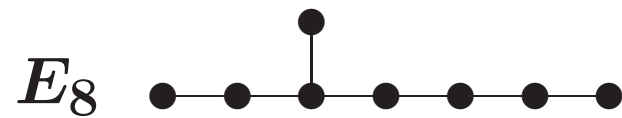
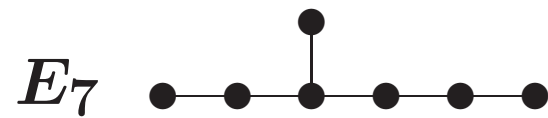
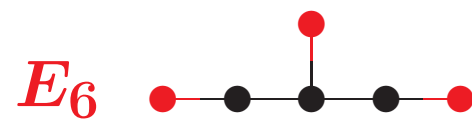
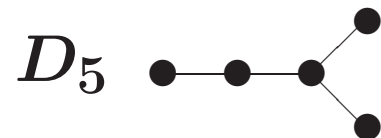
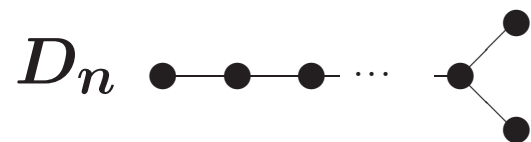
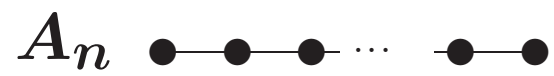
ディンキン図形が計算の仕方を教えてくれる。

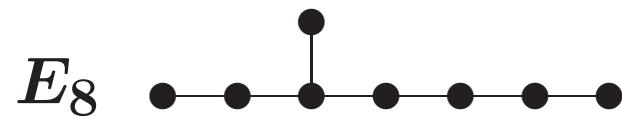
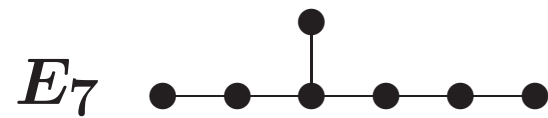
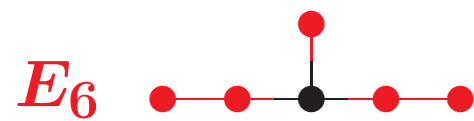
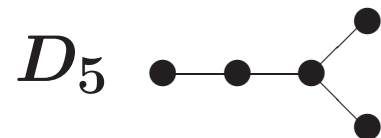
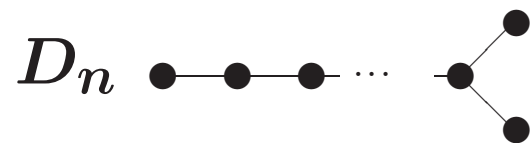
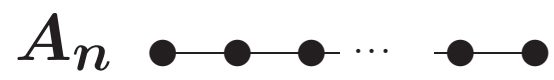


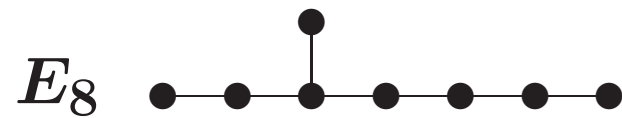
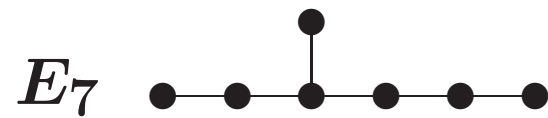
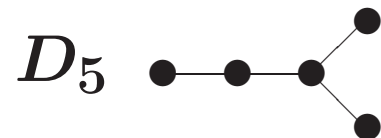
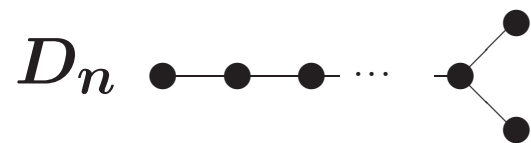
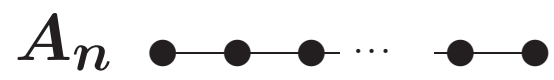


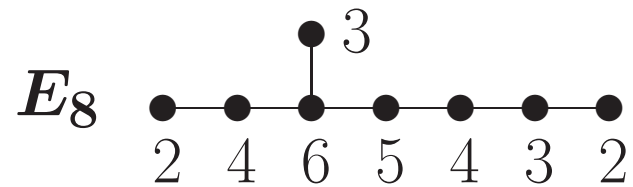
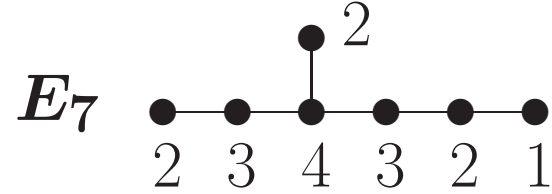
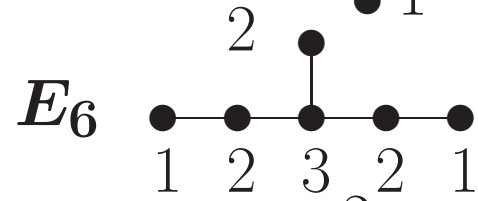
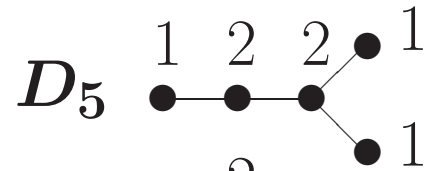
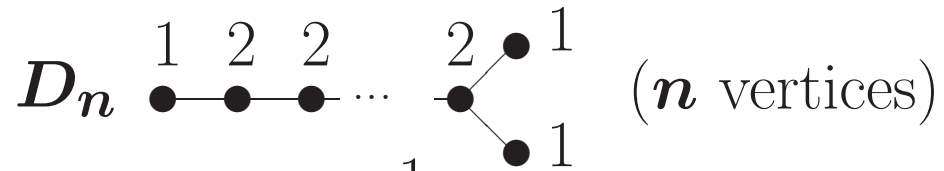
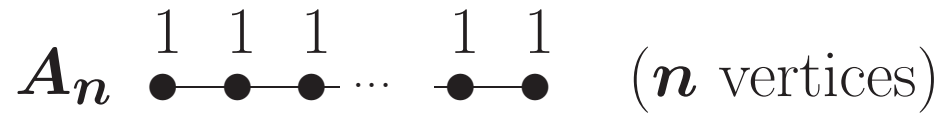












6 例外集合 — D_5 の場合

$G - \text{Hilb}(\mathbb{C}^2)$ と \mathbb{C}^2/G は原点の上以外では同型.

例外集合 : これは原点の上のみ :

$$E = \{I \in G - \text{Hilb}(X); I \subset \mathfrak{m}\}$$

ただし, $\mathfrak{m} = (x, y)\mathbb{C}[x, y]$ とする.

$I \in E$ に対して,

$$V(I) = I/(\mathfrak{m}I + \mathfrak{n})$$

とする. これはイデアル I の不変式以外の生成元を表す. ただし, $\mathfrak{n} = (F, G, H)\mathbb{C}[x, y]$. $V(I)$ は G -加群, つまり, ひとつの G の表現.

例外集合 E の既約成分 E_1

$$V_2(\rho_1) = \{xy\}, V_6(\rho_1) = \{x^6 - y^6\}$$

$$I_1(s) = \{xy + s(x^6 - y^6)\} + \mathfrak{n}$$

$I_1(s)$ は $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアル,

$xy + s(x^6 - y^6)$ 及び $\mathfrak{n} = (F, G, H)$ で生成される.

$$\dim \mathbb{C}[x, y]/I_1(s) = 12,$$

$$I_1(s) \in G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2) \quad (\forall s \in \mathbb{C})$$

$s \rightarrow \infty$ の極限:

$E \ni I$ ならば $I \supset \mathfrak{n} = (F, G, H)$

$$\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n} \twoheadrightarrow \mathbb{C}[x, y]/I \text{ (全射)}$$

$\therefore E \subset \text{Grassmann}(\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n}, \text{余次元 } 11)$

グラスマン多様体はコンパクトなので無限点列 $I_1(s)$ ($s \in \mathbb{C}$)

は収束する. そこで定義:

$$I_1(\infty)/\mathfrak{n} = \lim_{s \rightarrow \infty} I_1(s)/\mathfrak{n}$$

$I_1(\infty)$ の計算 \implies マツカイ対応

$$I_1(s) = \{xy + s(x^6 - y^6)\} + \mathfrak{n} \quad (s \neq 0)$$

$$I_1(s) = \{\frac{1}{s}xy + (x^6 - y^6)\} + \mathfrak{n} \quad (s \neq 0)$$

$s = \infty$, ところで $\frac{1}{s} = 0$ を代入してみる .

もしも $I_1(\infty) = \{x^6 - y^6\} + \mathfrak{n}$ だとすると

$I_1(\infty) \notin X^{[12]}$ となってしまう .

正しい答 : $I_1(\infty) = \{x^6 - y^6\} + \{x^2y, xy^2\} + \mathfrak{n}$

いつも \mathfrak{n} を含んでいるので , $s \neq 0$ のとき

$x^2y, xy^2 \in I_1(s)$ となる .

$$V_3(\rho_2) = \{x^2y, xy^2\} = \{x, y\} \cdot \{xy\} = \rho_{\text{nat}} \cdot V_2(\rho_1)$$

マツカイ : $\rho_2 = \rho_{\text{nat}} \otimes \rho_1$ を思い出させる .

E の部分集合を

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{I \in E; G\text{-加群 } V(I) \text{ が表現 } \rho_1 \text{ を含む}\} \\ &= \{I \in G\text{-Hilb}; \mathfrak{m} \subset I, \rho_1 \subset V(I)\} \end{aligned}$$

$$E_2 := \{I \in E; V(I) \supset \rho_2\}$$

と定義する.

このとき

$$E_1 = \{I_1(s); s \in \mathbb{C}\} \cup I_1(\infty) \simeq \mathbb{P}^1$$

$$V_3(\rho_2) = \{x^2y, xy^2\}, \quad V_5(\rho_1) = \{-y^5, x^5\}$$

同様に $t \neq 0$ に対して

$$I_2(t) = (x^2y - ty^5, xy^2 + tx^5) + \mathfrak{n}$$

と定めれば, $V(I_2(t)) \simeq \rho_2$. このとき,

$$E_2 = \{I \in E; \quad V(I) \supset \rho_2\} \simeq \mathbb{P}^1$$

$t \rightarrow 0$ を考える. $I_1(\infty)$ と同じ理由で,

$$I_2(0) = (x^2y, xy^2) + \mathfrak{n} \quad \text{とはならない}$$

$t \rightarrow 0$ のとき , 正しい答え :

$$I_2(t) = (x^2y - ty^5, xy^2 + tx^5) + \mathfrak{n},$$

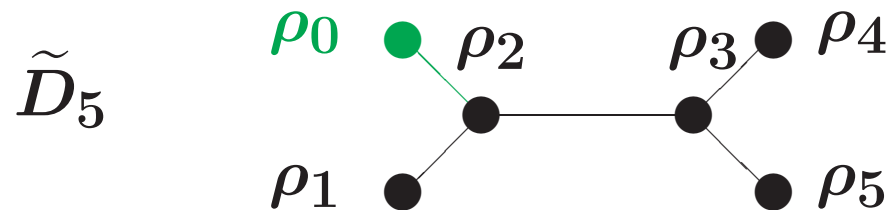
$$I_2(0) = (x^2y, xy^2) + (x^6 - y^6) + \mathfrak{n} = I_1(\infty)$$

$$V_6(\rho_1) = \{x^6 - y^6\}$$

$$= \{x, y\} \cdot \{-y^5, x^5\} \pmod{\mathfrak{n}}$$

$$= \rho_{\text{nat}} \cdot V_5(\rho_2) \pmod{\mathfrak{n}} + (x^2y, xy^2)$$

マツカイ : $\rho_1 + \dots = \rho_{\text{nat}} \otimes \rho_2$ を思い出させる .



$$I_1(s) = \{(1/s)(xy) + (x^6 - y^6) + \mathfrak{n}$$

$$I_1(\infty) = (x^2y, xy^2) + (x^6 - y^6) + \mathfrak{n}$$

$$V_3(\rho_2) = \{x^2y, xy^2\} = \{x, y\} \cdot \{xy\} = \rho_{\text{nat}} \cdot V_2(\rho_1)$$

マツカイ： $\rho_2 = \rho_{\text{nat}} \otimes \rho_1$ を思い出させる。

$$I_2(t) = (x^2y + t(-y^5), xy^2 + tx^5) + \mathfrak{n}$$

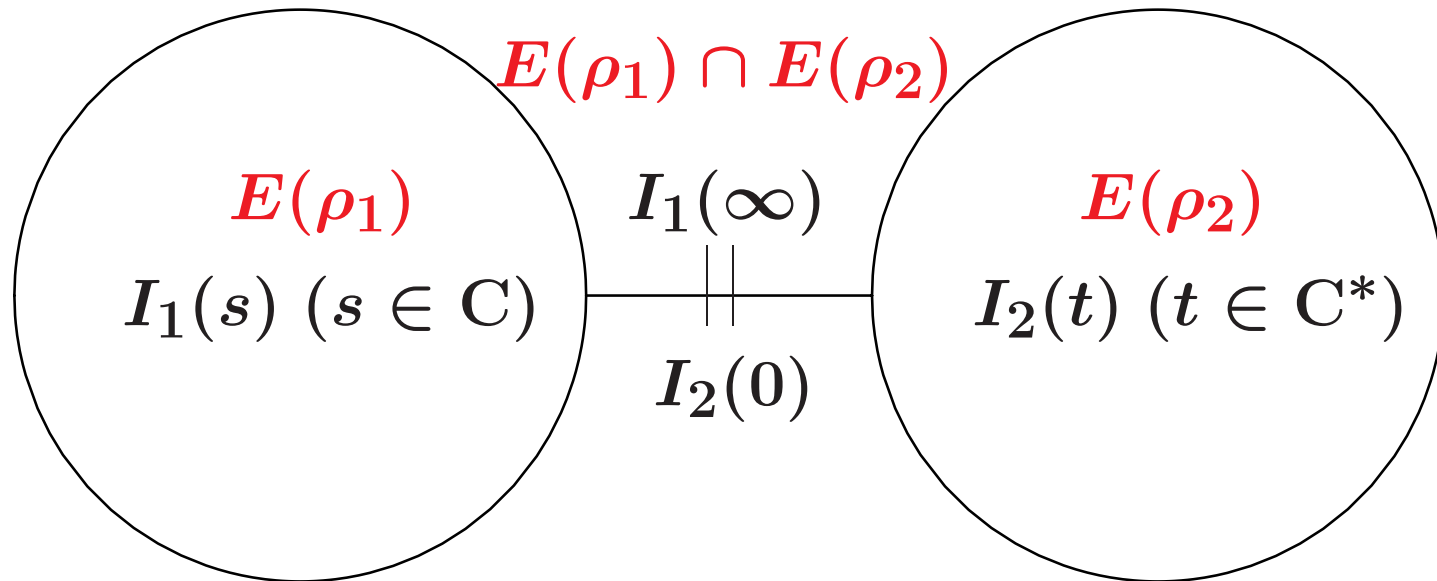
$$I_2(0) = (x^2y, xy^2) + (x^6 - y^6) + \mathfrak{n}$$

$$V_6(\rho_1) \equiv \{x^6 - y^6\} \equiv \{x, y\} \cdot \{-y^5, x^5\}$$

$$\equiv \rho_{\text{nat}} \cdot V_5(\rho_2) \pmod{\mathfrak{n} + (x^2y, xy^2)}$$

マツカイ： $\rho_1 + \cdots = \rho_{\text{nat}} \otimes \rho_2$ を思い出させる。

$(1/s) = 0$ または $t = 0$ とすると，赤の部分が緑に変化

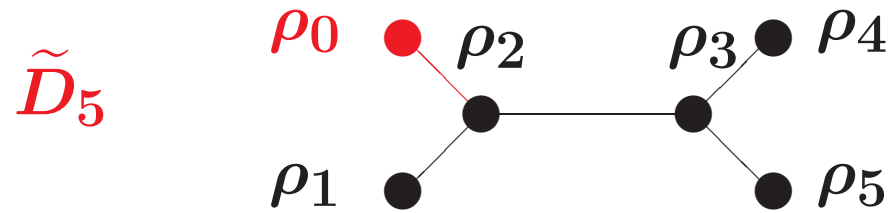


$$V(I_1(s)) \simeq \rho_1, \quad V(I_2(t)) \simeq \rho_2,$$

$$V(I_1(\infty)) = V(I_2(0)) \simeq \rho_1 \oplus \rho_2$$

$$s \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{C} \ (s \neq 0)$$

ただし $V(I) = I/(\mathfrak{m}I + \mathfrak{n})$: I の生成元



$$\rho_2 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_0 + \rho_1 + \rho_3$$

$$\rho_1 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_2$$

ディンキン図形はどのように出てくるか

m	$V_m(\rho)$	表現の同値類
1	$\{x, y\}$	ρ_2
2	$\{xy\} \oplus \{x^2, y^2\}$	$\rho_1 + \rho_3$
3	$\{x^2y, -xy^2\} \oplus \{x^3 \pm iy^3\}$	$\rho_2 + \rho_4^+ + \rho_5^-$
4	$\{y^4, x^4\} \oplus \{x^3y, -xy^3\}$	$\rho_3^{\oplus 2}$
5	$\{y^5, -x^5\} \oplus \{xy(x^3 \pm (-iy^3))\}$	$\rho_2 + \rho_4^+ + \rho_5^-$
6	$\{x^6 - y^6\} \oplus \{x^5y, -xy^5\}$	$\rho_1 + \rho_3$
7	$\{xy^6, x^6y\}$	ρ_2

余不変式環 $C[x, y]/\mathfrak{n} = C[x, y]/(F, G, H)$ の分解

$I \in G\text{-Hilb}(C^2)$ ならば $C[x, y]/I = C[G]$: 正則表現

次数	1	2	3	4
表現	ρ_2	$\rho_1 + \rho_3$	$\rho_2 + \rho_4 + \rho_5$	$\rho_3^{\oplus 2}$
次数	7	6	5	
表現	ρ_2	$\rho_1 + \rho_3$	$\rho_2 + \rho_4 + \rho_5$	

赤い部分の Quiver 構造がディンキン図形を定める

$$V_1 = \{x, \} \text{ とする . } V_1 \cdot V_2(\rho_1) = V_3(\rho_2),$$

$$V_1 \cdot V_3(\rho_2) \subset V_4(\rho_3), V_1 \cdot V_3(\rho_4) \subset V_4(\rho_3),$$

$$V_1 \cdot V_3(\rho_5) \subset V_4(\rho_3),$$

$$V_1 \cdot V_4(\rho_3) \equiv V_5(\rho_2) \oplus V_5(\rho_4) \oplus V_5(\rho_5),$$

$$V_1 \cdot V_5(\rho_2) \equiv V_6(\rho_1), V_1 \cdot V_5(\rho_4) \equiv 0, V_1 \cdot V_5(\rho_5) \equiv 0$$

次数	1	2	3	4
表現	ρ_2	$\rho_1 + \rho_3$	$\rho_2 + \rho_4 + \rho_5$	$\rho_3^{\oplus 2}$
次数	7	6	5	
表現	ρ_2	$\rho_1 + \rho_3$	$\rho_2 + \rho_4 + \rho_5$	

赤い部分の Quiver 構造がディンキン図形を定める

次数 3: $V_1 \cdot \rho_1 = \rho_2$, ただし, $V_1 = \{x, y\}$

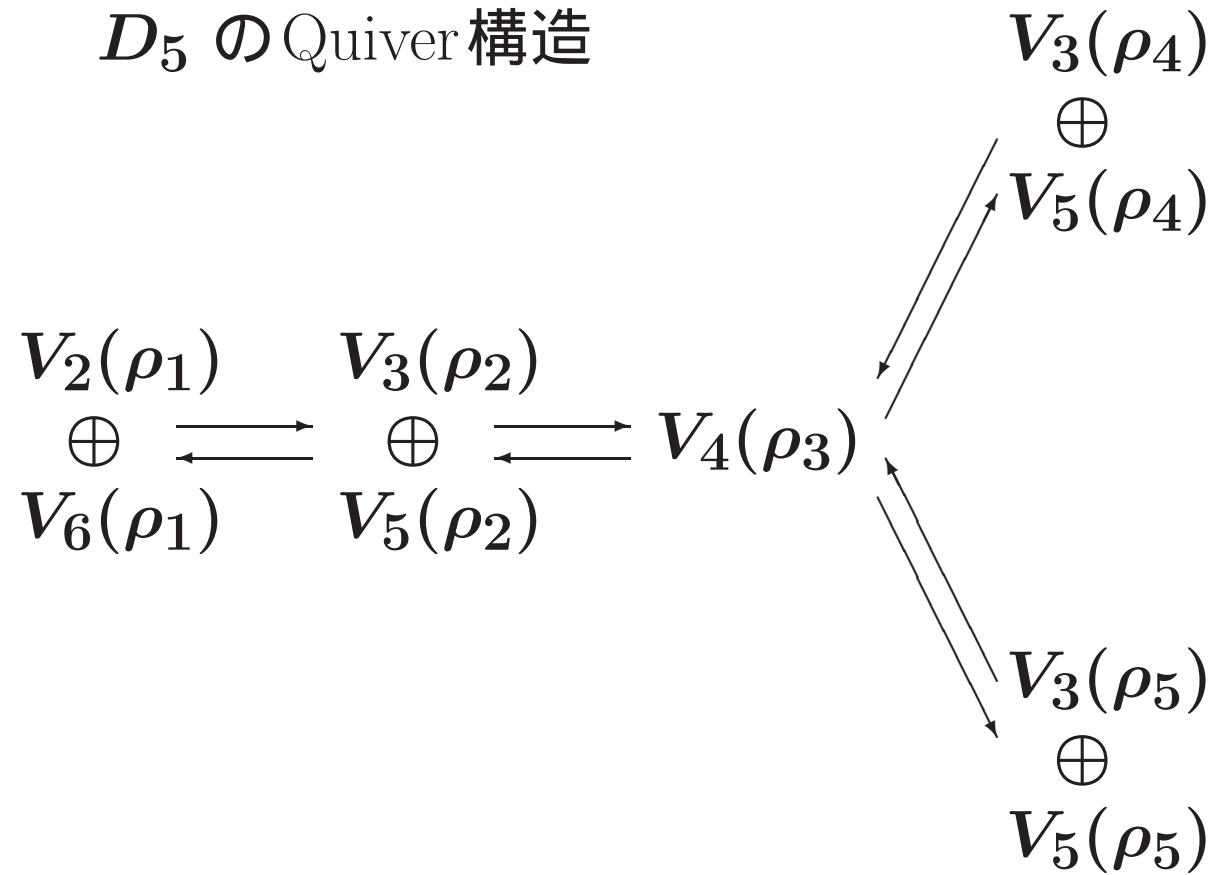
次数 4: $V_1 \cdot \rho_2 = \rho_3$, $V_1 \cdot \rho_4 = \rho_3$, $V_1 \cdot \rho_5 = \rho_3$

次数 5: $V_1 \cdot \rho_3^{\oplus 2} \equiv \rho_2 \oplus \rho_4 \oplus \rho_5$

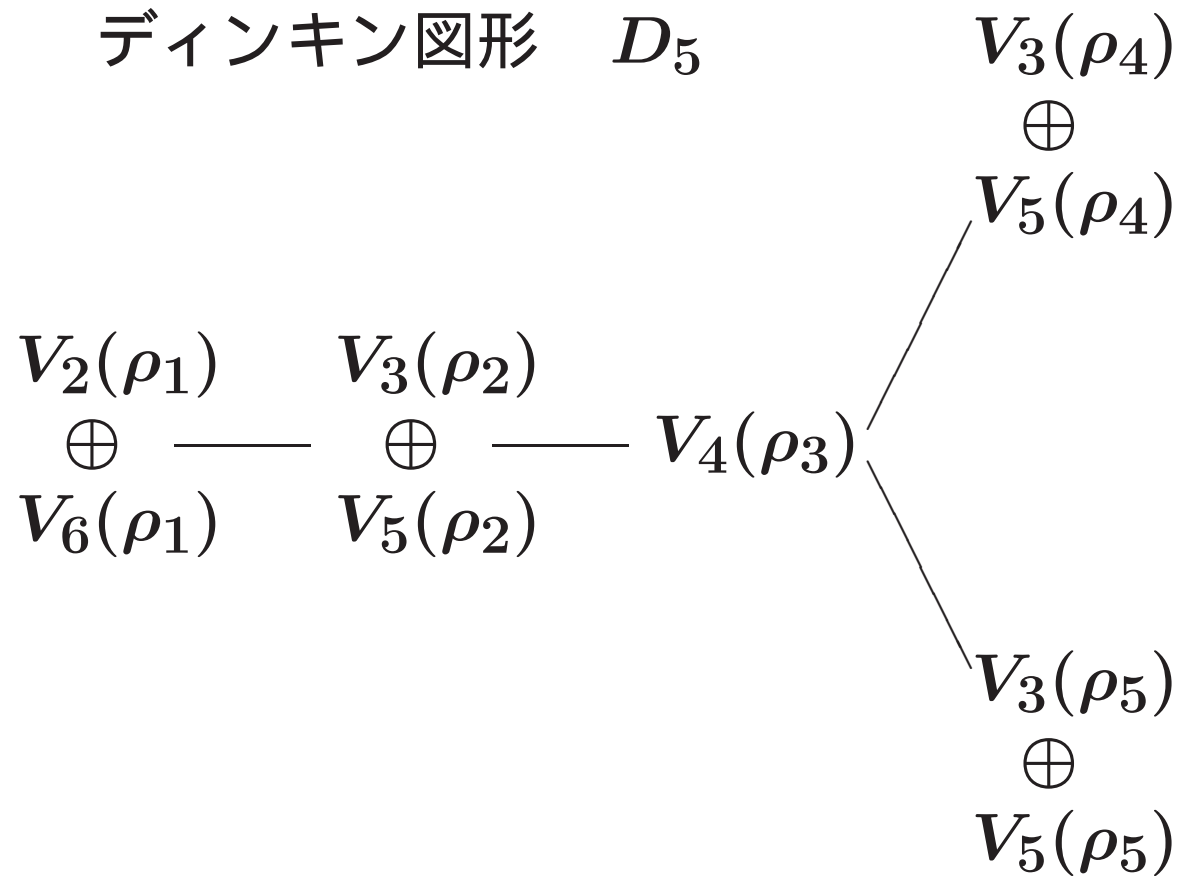
次数 6: $V_1 \cdot \rho_2 \equiv \rho_1$, $V_1 \cdot \rho_4 \equiv 0$, $V_1 \cdot \rho_5 \equiv 0$

$C[x, y]/I = C[G]$: 正則表現だから, 緑の部分は I に含まれる

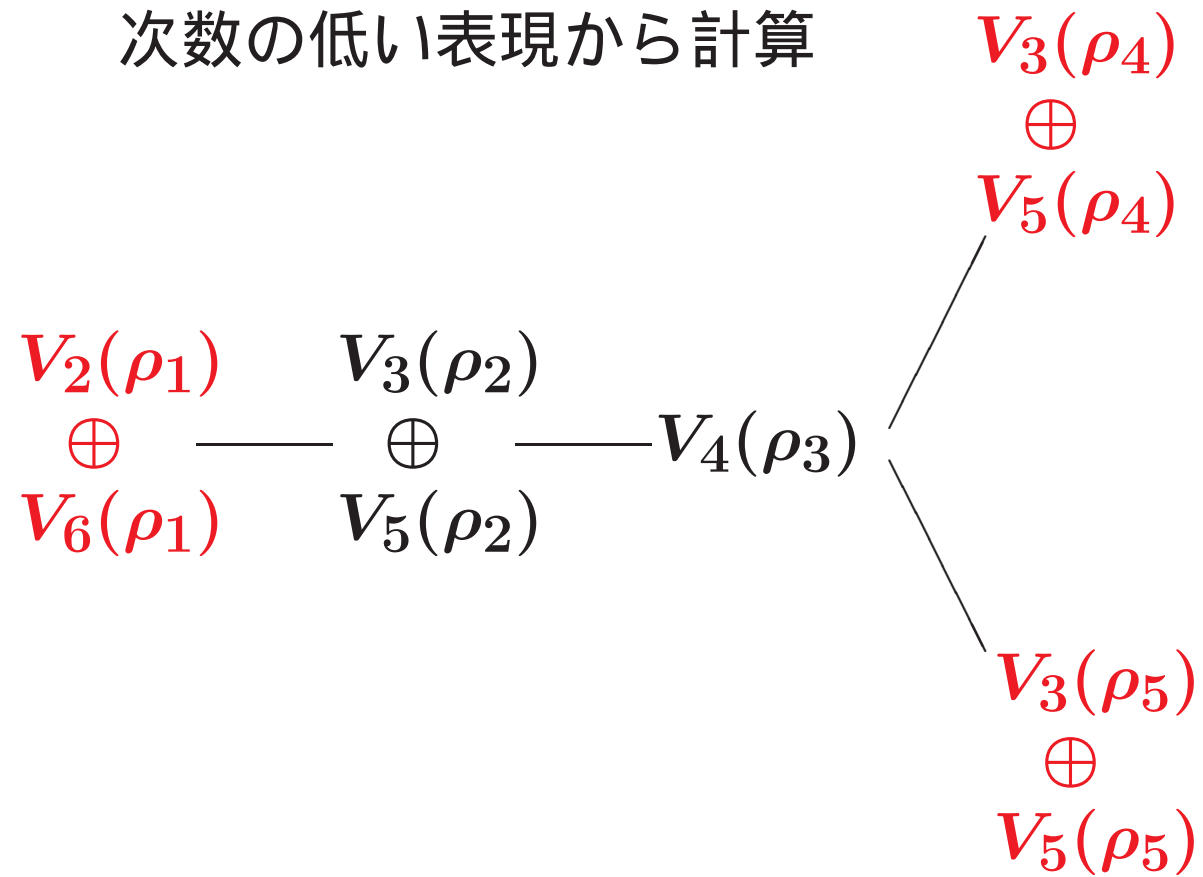
D_5 の Quiver 構造



ディンキン図形 D_5



次数の低い表現から計算



7 例外集合 — E_6 の場合

$G(E_6) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (Binary Tetrahedral Group)

$G(E_6) = \langle \sigma, \tau, \mu \rangle$ 位数 24

$$\sigma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \epsilon^7 & \epsilon^7 \\ \epsilon^5 & \epsilon \end{pmatrix},$$

where $\epsilon = e^{2\pi i/8}$.

$G(D_4) := \langle \sigma, \tau \rangle$, normal in $G(E_6)$

$1 \rightarrow G(D_4) \rightarrow G(E_6) \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow 1.$

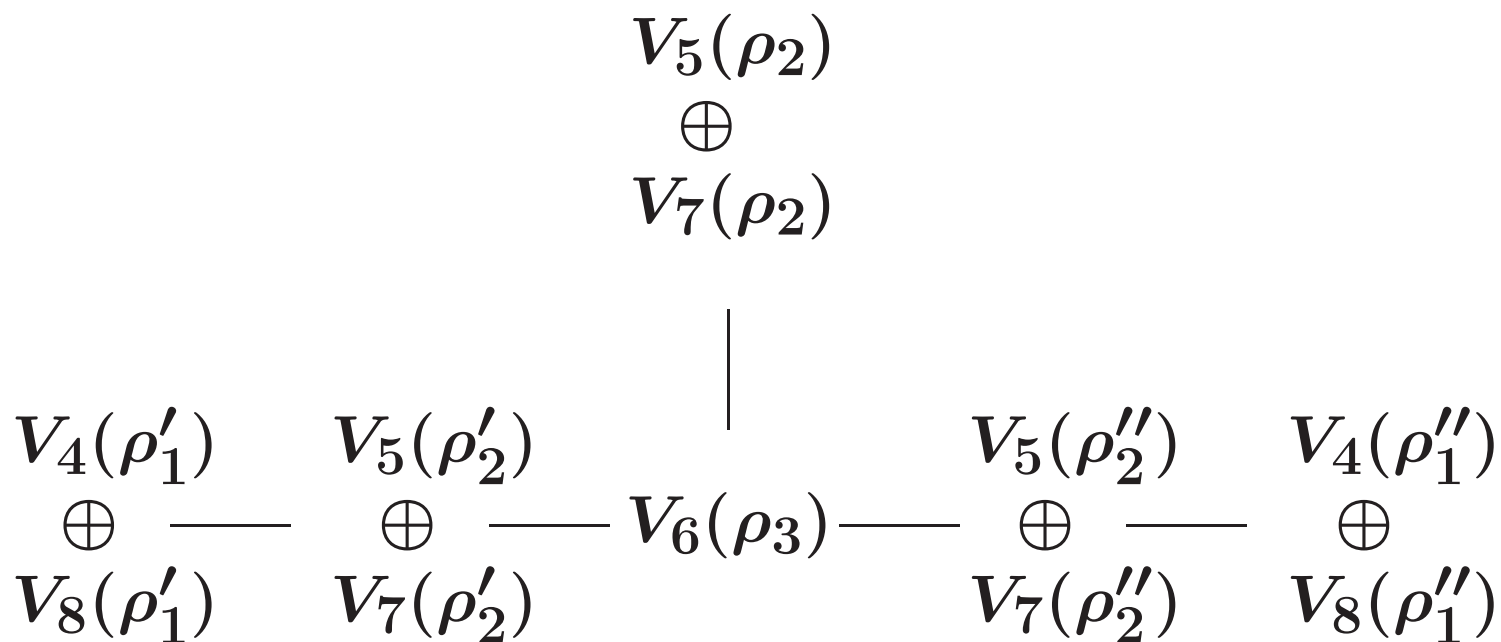
$$\mathbb{C}^2/G(D_4) \xrightarrow{3:1} \mathbb{C}^2/G(E_6)$$

E_6 の既約表現 (既約指標)

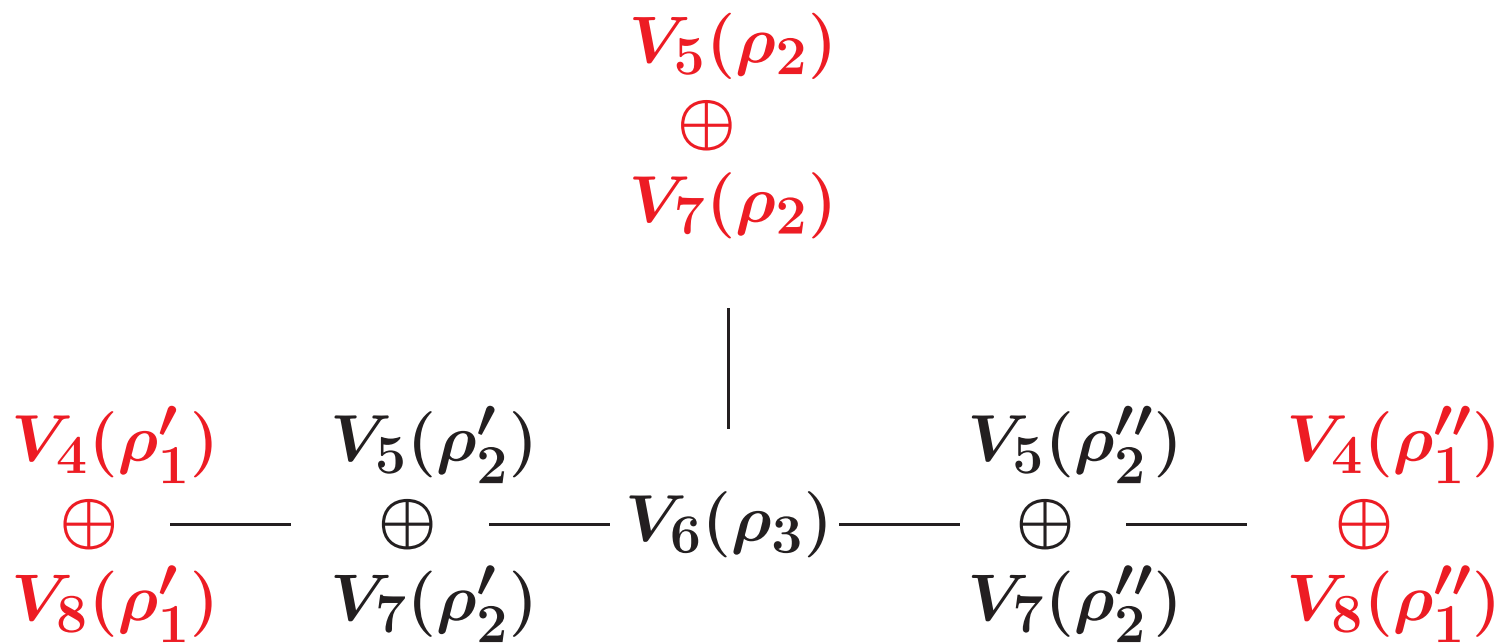
	1	-1	τ	μ	μ^2	μ^4	μ^5
(#)	1	1	6	4	4	4	4
ρ_0	1	1	1	1	1	1	1
ρ_2	2	-2	0	1	-1	-1	1
ρ_3	3	3	-1	0	0	0	0
ρ'_2	2	-2	0	ω^2	$-\omega$	$-\omega^2$	ω
ρ'_1	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
ρ''_2	2	-2	0	ω	$-\omega^2$	$-\omega$	ω^2
ρ''_1	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2

E_6 の余不変式環

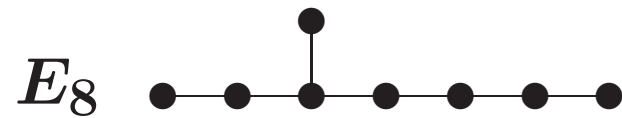
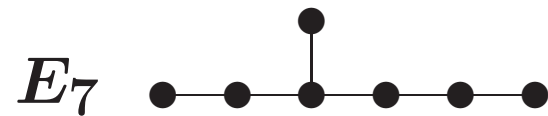
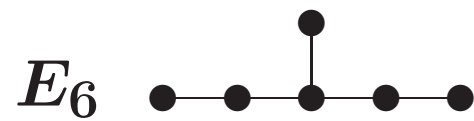
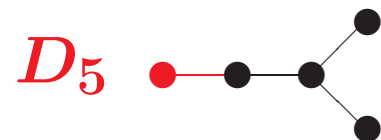
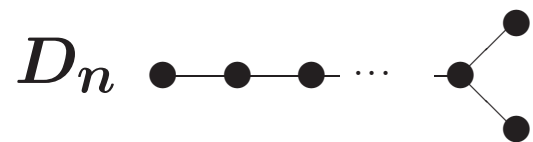
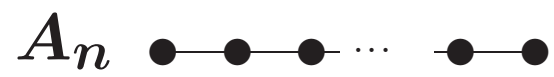
m	\bar{V}_m
1	ρ_2
2	ρ_3
3	$\rho'_2 + \rho''_2$
4	$\rho'_1 + \rho''_1 + \rho_3$
5	$\rho_2 + \rho'_2 + \rho''_2$
6	$2\rho_3$
7	$\rho_2 + \rho'_2 + \rho''_2$
8	$\rho'_1 + \rho''_1 + \rho_3$
9	$\rho'_2 + \rho''_2$
10	ρ_3
11	ρ_2

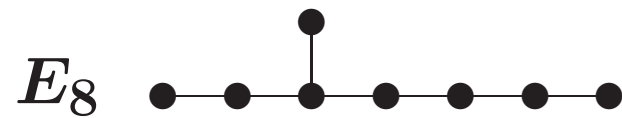
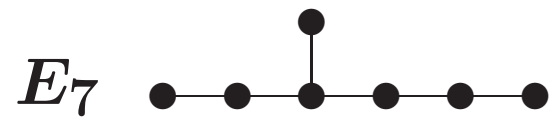
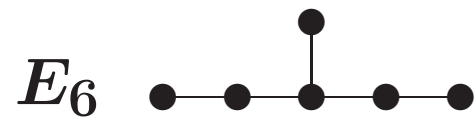
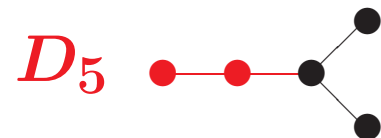
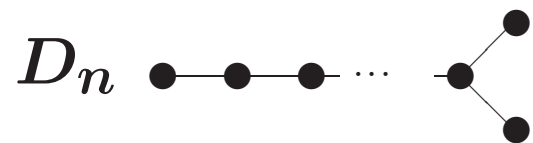
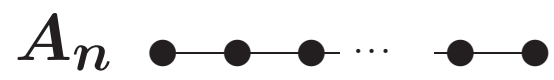


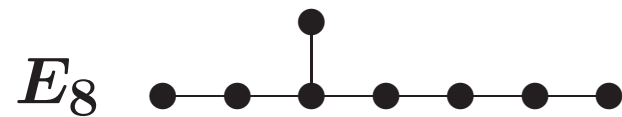
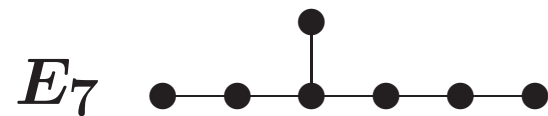
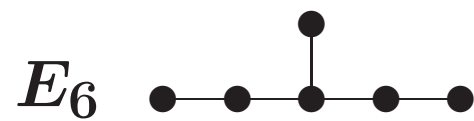
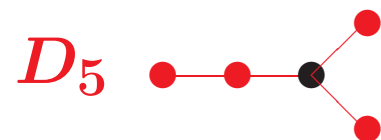
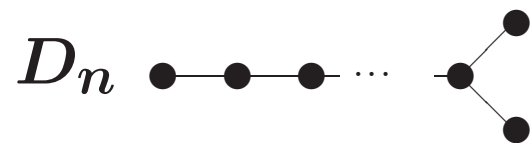
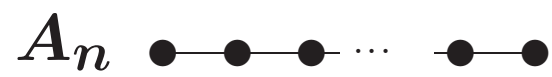
ディンキン図形 E_6

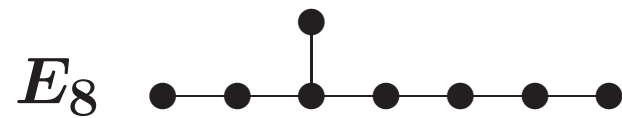
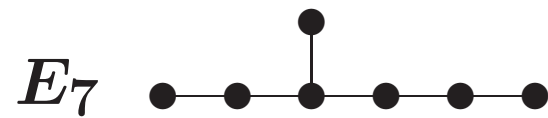
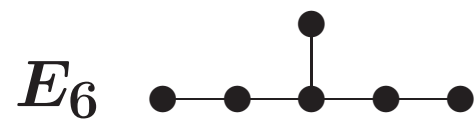
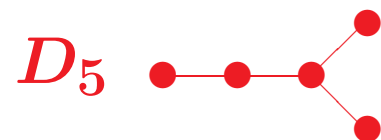
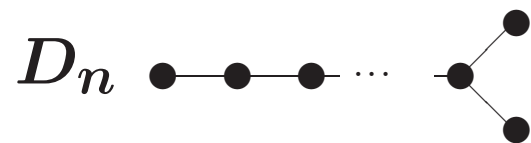
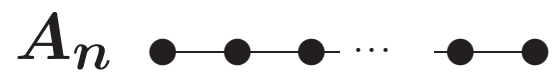


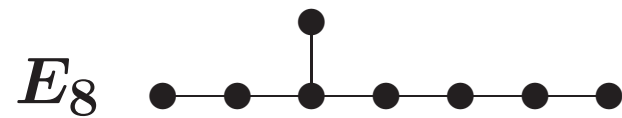
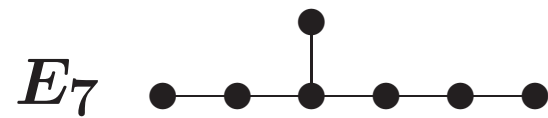
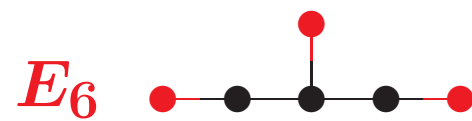
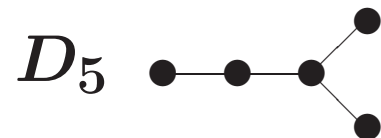
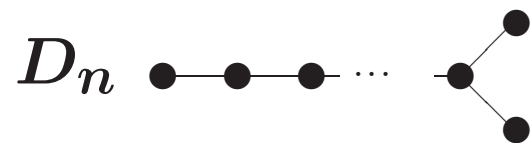
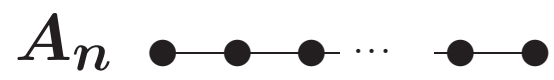
ディンキン図形 E_6

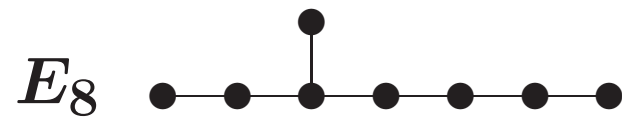
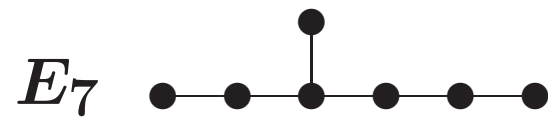
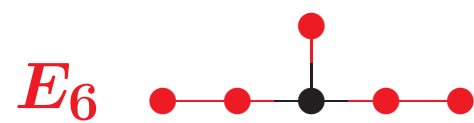
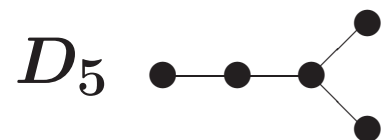
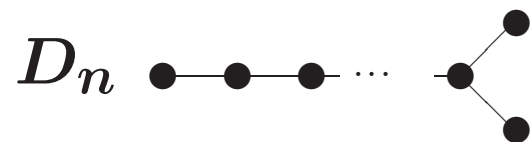
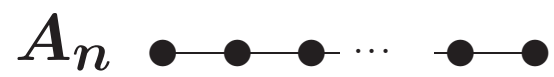


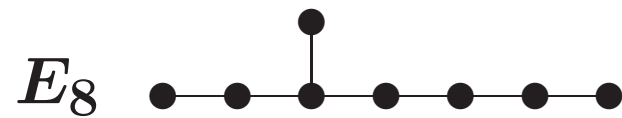
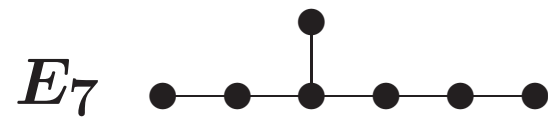
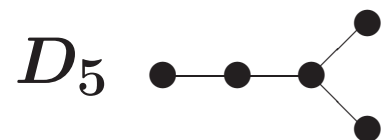
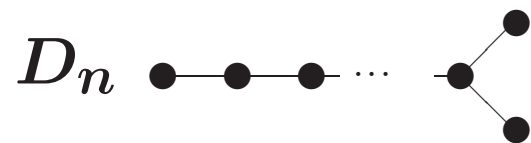
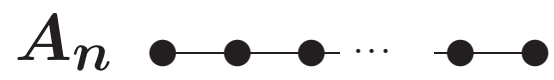












8 まとめ

$I \in G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ の計算は余不変式環の中であればよい。

不変式は，余不変式環の中でゼロとなる。

- 余不変式環を見る \Leftrightarrow ディンキン図形の中の単位表現を無視
余不変式環の中で，いつも $I \in E \subset G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ に含まれる
部分（緑の部分）がある

- 残りの部分（赤の部分）がディンキン図形に関係

例外集合 E に属する I は \mathfrak{n} を含むので

$$V(I) := I/(\mathfrak{m}I + \mathfrak{n})$$

と定義. $V(I)$ は既約, または二つの既約表現の直和
 G の既約表現 ρ, ρ' に対し, E の部分集合を定義:

$$E(\rho) := \{I \in E; V(I) \supset \rho\}$$

$$P(\rho, \rho') := \{I \in E; V(I) \supset \rho \oplus \rho'\}$$

定理 7 (伊藤-中村 1999)

G を $SL(2, \mathbb{C})$ の有限部分群とする. そのとき

- (1) $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ は \mathbb{C}^2/G の最小特異点解消.
- (2) G の任意の単位表現と異なる既約表現 ρ に対して
 $E(\rho)$ は \mathbb{P}^1 , 対応 $\rho \mapsto E(\rho)$ はマツカイ対応,
- (3) ρ_{nat} とのテンソル積の既約表現への分解規則は
余不変式環の Quiver 構造として現れ,
 $E(\rho)$ の間の交点 $P(\rho, \rho')$ を生み出す.

終わり