「むずかしいことをやさしく，やさしいことをふかく，……」

北海道大学　　中村　郁

表題は劇団「こまつ座」の機関誌「the 座」に寄せられた井上ひさしの文章のつぎの一節による:

「むずかしいことをやさしく，やさしいことをふかく，ふかいことをおもしろく，おもしろいことをまじめに，まじめなことをゆかいに，ゆかいなことをいっそうゆかいに」(井上ひさし)

筆者は朝日新聞の永六輔の一文でこの井上ひさしの言葉を知った．誰の言葉か知らずに「おもしろく」までを読めば，科学者の言葉と思っても不思議はない.「まじめに」という言葉があるために，もしかしたら不真面目なひとの文章なのか，と思うわけではないが，日本では田中耕一さんを始め科学者はまじめなものだというのが常識である．だから「まじめに」という言葉に出会うと，科学者の言葉ではないな，と分かる．

ところで，フランス語にはこういう言葉がある：

「明瞭でないものはフランス語でない」(リバロル)

この言葉に至るフランス語の歴史はそんなに甘いものではない．しかし言い換えができるのはうれしい：

「明瞭でないものは数学でない」

だからと言って

『明瞭でないものは日本語でない』

という表現が許されるわけではない．この国はかつて首相竹下登がみずからの国会答弁を「言語明瞭，意味不明」と評したこともあるくらいである．この『』の中が実質的なものになるように，日本の中で数学者のできることはたくさんあるはずである．

日本語の文章読本のほとんどは，文章は余分なことはそぎ落とし，極限まで無駄を省いた表現を推奨する.「つきつめて，その主張にあいまいさを残さぬところまで考えつくしたものを書け」，そう教える．もちろんそのことに異論はない．

しかし簡潔な文章を書くことと，曖昧さのない文章を書くということは，とりわけ数学の場合には，すくなからず相反することである．(定義を書くなどというのが，世間ではすでに簡潔でないのだ．) 読者の勘のよさを期待して簡潔に書くことで，逆に振るい落とされる読者もいる．私は自分が鈍い方だからやはり，文章の簡潔な美しさよりは達意明快のほうをとりたいと思う.「やさしいことをわざわざむずかしくしない」ためである.「夜の底が白くなった」などという文章は避けるほかない．願うことなら

「むずかしいことをわかりやすく，わかりやすいことをできるだけふかく，ふかいことをおもしろく」

書きたいし話したいと思う．相手が数学者でなければなおさらである．

「先生，学生なんて単位のしばりがあるから，つまらない講義だってきいてくれるけど，ふつうのひと相手に無料で 5,6 回連続講義やってみなよ．そうすりゃ，(話が) うまくなるよ．下手なら，みんないなくなるから.」もう 20 年も前に親しい学生からこう挑戦を受けたのだが，いまだにその機会がない．

数学の講演も，昔はわざと分かりにくい話にしていい気でいたこともあった．今は「わかりやすかった」と言われるほうがうれしい．札幌在住のプロのフルート奏者中山耕一さんと雑談の機会にその話をしたことがある．そうしたら彼も言うのだ.「私もそうでした．わざとむずかしそうに演奏したものでした．今はそういうところでもさらっとやりたい.」

数学に話を戻す．代数幾何学の現在もっとも一般的な考え方はグロタンディークの『代数幾何学原論』による．彼は時代の制約をこえて目標とする問題 (ヴェイユ予想) を解決するために，数学を考える，そのための言葉から作り上げようとした数学者である．

彼の業績は，一口に言えば，それまでの空間概念を拡張して，代数幾何学という分野そのものを再定義したということになる．その根底には，

「空間はその上の関数によって規定される」

という基本的な考え方があると言ってよい．それを基本原理として完全に幾何学を書き換えたらどうなるか,『代数幾何学原論』はそのひとつの答えであるように見える．そしてそれは，代数的に扱いうる幾何学の自然にして最大の領域を開拓しようとした，壮大な構想の提示でもあった.「『原論』の叙述は最短距離をとって自然である」(藤原一宏).『原論』を貫く，すべてを明瞭に書こうとする意志，その背後には「明瞭でないものはフランス語でない」というフランスの伝統を感じないわけにはいかない．ドゥリーニュによるヴェイユ予想の解決 (1974) を経て，それは現在の数論幾何学をも産んだ.

1　代数幾何学の問題とは？

そこでその代数幾何学について説明したい．まず第一に,『原論』の中で用意された「空間」(スキーム) とは，(少し注意は必要だが) 有限個の多項式の連立方程式の共通解のなす集合を意味する．それでは代数幾何学の問題はなにか？　数論幾何学の発展をふまえて，つぎのように言うことができる.

有限個の多項式の連立方程式の解をすべて求めよ，
その解全部のなす集合 (解空間) を決定せよ.

本質的にこれと同等のことを問題にするのが代数幾何学である．一般には難しすぎるので方程式に条件をつける．これは多くの場合，解空間の幾何学的な情報に制限をつける形で課される．そこで，代数幾何学の定理はおおむねつぎのような形式をとる：

ある条件の下で，その解空間は既知の
方程式の解空間と同一視できる.　(1)

「ふたつの空間が同一視できる」とは,「ふたつの空間の上の関数のなす可換代数 (可換環) が可換代数として同型である」，と定義する．これが「空間はその上の関数によって規定される」という言葉の意味するところである．変数を取り替えたり，方程式を整理したり，そういうことはすべて「同一視」の中に含まれる．本当は厳密に定義することが必要だが，それをすると教科書になってしまうから，あとで例で説明する.

もし方程式や空間が非常に具体的な場合には，上のような主張では何も意味しないことになるが，その場合には少し注意深く定理を読めば，今度は，解空間は非常に詳しく分かる，と主張しているはずである．上のたぐいの主張はさまざまな形で現われる．あるときは分類の問題として，あるときはモジュライの問題として，あるときは有理点を求める問題として現われる.

2　「同一視とは?」— 少し具体的に

ここで少し具体的な話をしたい．まず「同一視」について例で説明する．(アファイン) 曲線

$$C : x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

を考えよう．(2) は解

$$(x, y) = (\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}) \tag{3}$$

を持つ．これからただちに C の $\mathbf{Q}$-有理点の集合 $C(\mathbf{Q})$，(註．$\mathbf{Q}$ は有理数全体を表す) つまり方程式 $x^2 + y^2 = 1$ を満たす有理数 (x, y) の対の集合は,

$$\begin{aligned} C(\mathbf{Q}) &= \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbf{Q}\} \\ &= \{(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}); t \in \mathbf{Q}\} \end{aligned}$$

となることが分かる．実際，点 $(x, y) = (1, 0)$ と $C(\mathbf{Q})$ の点 (a, b) を直線 ℓ で結べば，傾きは有理数だからそれを s とすると，ℓ は次の式で定義される：

$$\ell : y = s(x-1).$$

そこで ℓ と C の交点を計算すれば，それは $(1, 0)$ と $(x, y) = (\frac{s^2-1}{s^2+1}, -\frac{2s}{s^2+1})$ となる．そこで $t = -s$ とすれば (3) になる.

今度はつぎの二つの (アファイン) 曲線を考える：

$$\begin{aligned} D &:= \{(t, u); u = 0\}, \\ E &:= \{(z, w); zw = 1\}. \end{aligned}$$

さきほどと同様に

$$\begin{aligned} D(\mathbf{Q}) &:= \{(t, u); u = 0, t \in \mathbf{Q}\}, \\ E(\mathbf{Q}) &:= \{(z, w); zw = 1, z, w \in \mathbf{Q}\} \end{aligned}$$

を考えてみる．すると (3) は，それを D から C への写像だと思って，$D(\mathbf{Q})$ が $C(\mathbf{Q})$ に 1 対 1 であることを示している．しかし，これで C と D が同一視していいことにはならない．例えば $\mathbf{Q}$ の代わりに $\mathbf{C}$(複素数全体) をとると，分母の t^2+1 は $t=\pm\sqrt{-1}$ でゼロになることがあるので，この写像 (3) で同一視はできない．ところで，$i=\sqrt{-1}$ とすると

$$x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)=1$$

なので，

$$z=x+iy,\ w=x-iy$$

として，E と C が同一視できそうに見える．ところが，この関係式では $E(\mathbf{Q})$ を $C(\mathbf{Q})$ に写してくれない．答を書いて「同一視」の説明を終わりたい：

(i) C と D を (アファイン) 曲線としては同一視できない，

(ii) C と E は体 $\mathbf{Q}(i)$ 上では同一視してよいが，$\mathbf{Q}$ 上ではできない，

(iii) C, D, E はコンパクト化すればすべて有理曲線なので $\mathbf{Q}(i)$ 上同一視してよい．

3　呉服屋の番頭になるには？

つぎに，代数幾何学における見方考え方を説明するために，(1) を通じてどんなことを数学者が目指すかを見ることにしたい．昔，呉服屋の番頭は，反物の良し悪しを見分けられるようになるために，ただ良い反物を見せられたと言う．「学ぶ」とは，まず「よいものとは何かを学ぶ」ことである．そこでたとえば，つぎのアファイン曲線 $Y_0(11)$ を考える：

$$Y_0(11): y^2=4x^3-4x^2-40x-79 \tag{4}$$

$(x,y)=(5,11)$ は (4) を満たす．$Z_0(11)$ を $Y_0(11)$ から点 $(5,11)$ を除いた曲線とすると，標数ゼロの体 k に対し，その k-有理点の集合

$$Z_0(11)(k):=\{(x,y);(4)\ \text{の解で}\ x,y\in k\}$$

は，つぎのような解釈を持つ：

$$\left\{\begin{array}{l}(E,G);\\ E\ \text{は楕円曲線}\ w^2=4z^3-az-b,\\ G\subset E\ \text{は位数 11 の部分群},\ (a,b\in k).\end{array}\right\} \tag{5}$$

楕円曲線は可換群の構造を持つ．だから和をとることができるが，P の和を n 回とると初めてゼロ (無限遠点) になるとき，P は位数が n であるという．(5) の理由をここでは説明できないが，k-有理点の集合がこういう解釈を持つのは，モジュライ空間という特別な空間に特有のことで，このほかにも興味ある例がたくさんある．$P=(5,11)\in Y_0(11)$ とすると，P の位数は 5 で，$2P=P+P=(16,-121)$, $3P=(16,121)$, $4P=(5,-11)$ となる．$Y_0(11)$ の $\mathbf{Q}$-有理点はこれ以外ない．さらにつぎの事実が知られている：

「もし $n\geqq 13$ または $n=11$ ならば，どんな $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線も位数 n の $\mathbf{Q}$ 有理点を持たない.」

$n=11$ の場合はビリングとマーラーらの定理である． メイザーによって一般の場合が証明された．これは間違いなく良い反物，大変深い定理である．なお，上の $2P,3P,4P\in Z_0(11)(\mathbf{Q})$ には (5) により楕円曲線と位数 11 の $\mathbf{Q}$ 上の部分群が対応するが，位数 11 の $\mathbf{Q}$-有理点はない．

ここで話題を変えて，過去 (約)20 年間における代数幾何学でおそらく最大の『簡明にして普遍的な法則』—『森理論』(1982) をあげておきたい：

「有理曲線が空間 (ファノ多様体) の構造を決定する.」

ありふれた対象に対して，ありふれていない法則を簡潔に提示している例である．平凡なものと平凡なものが予想外の仕方で結びつくこともあり，平凡なものの中に平凡ではない法則を見い出すこともある．

「善いものほどありふれたものはない．ただ問題はそれを識別することである.」(パスカル)

あるいは，すでに知られていることでも，見方を変えてもっと深く理解することができるとすれば，それも素晴らしい．ほかの人が考えたことのないような仕方で答えを提出する，あるいはほかの人が考えたことのないような問題に答える，これも素晴らしい．

引用の多かった小文を，最後にもうひとつ言葉を引用して終わることにしたい：

「おおきな夢を持つひとがいい仕事をする」
(岩沢健吉)