無限次元表現と冪零軌道・等方表現

山下　博

数学専攻

(平成 14 年 1 月 30 日)

はじめに

現代社会を生きる私達は，加減乗除などの数の算法をはじめ，さまざまな演算 (算法) を用いている．例えば，ある行為に引き続いて別の行為を行って目的とする行為を実現することは，私達が常に行っている演算のひとつである．一定の法則を満たす演算を備えた集合を体系的に扱う学問が代数学であるが，そのなかで，次のように定義される群という代数系は，最も基本的なものである．

定義 1. 空でない集合 G の各要素 g, h に対して，g と h の積とよばれる G の要素 gh を対応させる演算が定まっていて，次の性質 1 〜 3 を満たすとき，集合 G は**群**であるという．

1. 結合法則 $(gh)k = g(hk)$ $(g, h, k \in G)$ が成り立つ．
2. すべての $g \in G$ に対して $eg = ge = g$ となる G の要素 e が (ただひとつ) 存在する．e を G の単位元という．
3. 各 $g \in G$ に対して，$gg^{-1} = g^{-1}g = e$ なる G の要素 g^{-1} が (ただひとつ) 存在する．g^{-1} を g の逆元という．

さらに，積演算が交換法則 $gh = hg$ $(g, h \in G)$ を満たすとき，群 G は可換であるという．

歴史的には，群という代数系が上のような形で定式化され，数学に本格的に登場するきっかけとなったのは，代数方程式の可解性に関する Abel と Galois の研究に負う．代数方程式の解に置換により働く群の性質が，方程式が代数的に解けるかどうかを決定するという結果は著名である．一方で，球面や正多面体など，大きな対称性を備えた図形を多くの人は美しいと思う．なぜ美しいと思うかを解き明かすのは (恐らく数学の範囲を超えており) 難しいが，ある図形 (幾何学的対象) をそれ自身に移す変換たちが作る群は，当該の図形の対称性を記述し，対称性の大きさは，対

応する変換群の構造の豊富さに反映されるのは事実である．このことも，群を語る際に欠かせない視点である．

さらに重要なことは，上のふたつの例でもそうであるが，私達が扱う群のほとんどは，それが単体で現れるのではなく，ある集合への作用を伴って登場するということである．従って，与えられた群が如何なる作用を持ち得るかをよく理解することは，群の「生きざま」に関わる重要な問題となる．作用のなかでも，群がベクトル空間に一次変換として働くとき，その作用を群の (線形) 表現という：

定義 2. V を複素ベクトル空間とする．群 G の各要素 g に対して，V 上の一次変換 $\pi(g)$ が定まっていて，

$$\pi(gh) = \pi(g)\pi(h) \quad (g, h \in G), \quad \pi(e) = I_V \ (I_V \text{ は } V \text{ 上の恒等変換})$$

を満たすとき，π を群 G の V 上への**表現**という．

さらに，G の表現 π が**既約**であるとは，すべての $g \in G$ に対して (同時に) $\pi(g)W \subset W$ となる V の部分空間 W が，$\{0\}$ と V 自身のみであるときをいう．

喩えるとすれば，既約な表現とは，もうこれ以上小さく分解できない表現，つまり物質を構成する原子のような存在であるといえよう．また，ベクトル空間 V が n 次元のときには，群 G の表現とは，G での積演算が行列の掛け算に対応するように，群の各要素を n 次の正則な複素行列で実現することに他ならない．つまり，表現論は数の並びである行列に息吹を与え，活躍の場を提供する (cf. [30])．なお，群の表現についての基本的な考え方は，例えば，昨秋出版された平井武氏による著書 [8] に，さまざまな実例とともに，丁寧に著されている．参考になるだろう．

この小文は，リー群と呼ばれる，可微分多様体の構造を備えた群の表現の話である．このように位相が定まった群に対しては，ある種の連続性を満たす表現を考察の対象にするのが自然である．本文では，半単純リー群の既約な無限次元連続表現が，群の内部構造，特に，対応するリー代数の**冪零軌道**と如何に結びついているかを，筆者が近年行っている研究の解説を兼ねて，論じてみたい．

閑話休題. ☆ 巾　冪　羃　[音：ベキ　訓：(用いない)]　羃の字の本来の意味は,‘ おおう (to cover) ’,‘ おおうもの (cover, curtain) ’であるが，1940 年代以前には，累乗の意味に用いられていた．冪はその俗字であり，巾は，和算家が用いた略字であるが，数学以外でこれらの文字を用いることがほとんどないた

め，1950 年代よりこの漢字は用いないことになり，代りに累乗を用いることになった．以来,‘ 冪 ’を伴う用語は，学校数学では，すべて‘ 累乗 ’を伴なう用語におきかえられている．例えば，冪指数⇒累乗指数，冪根⇒累乗根．しかし，大学程度の数学では,‘ power series ’をベキ級数といったりして一部にベキという語は残っている．この場合，学術用語集では‘ べき ’と平仮名で表記している．一方，岩波の数学辞典では‘ ベキ ’と片仮名で表記している.(「数学用語の漢字」数学言語研究会，執筆 島田茂氏より引用）

☆ 新聞や書籍等で,「閑話休題」という表題のコラム欄をときどき見かける．実際，数年前，朝日新聞の日曜朝刊に掲載されていたコラムにも，この表題がついていたらしい．ちょっとした話，本筋からは少し脱線する話を付け加えるときに，用いられる標語である．しかし，本来は，『話を本筋に戻すとき，または本題に入るときに用いる言葉．接続詞的に用いる．むだな話はさておいて．それはさておき．さて.』(大辞林第二版) という意味であるそうな．つい先日，ある数学者との会話で話題となった．言葉どおりに解すれば，我が小文でも，このコラム以外の部分がむだ話になってしまうのである (^_^)

1 研究の背景： リー群の表現論と軌道理論

閑話休題 (本来の意味)，可換でない群の表現論は, 1900 年前後の Frobenius, Schur らによる有限群の線型表現の研究に端を発する．その後, 直交群 $O(n)$ やユニタリ群 $U(n)$ を含むコンパクト (リー) 群に対する Cartan, Weyl の表現理論を経て, 1940 年代半ばに得られた特殊ローレンツ群 $SO_0(2,1)$, $SO_0(3,1)$ の既約ユニタリ表現の分類・構成についての Bargmann [2] や Gelfand-Naimark [6] らの創始的研究は，コンパクトでないリー群に対しては，無限次元表現の研究が本質的であることを明らかにした．実際，例えば群 $SO_0(2,1)$ や $SO_0(3,1)$ の既約ユニタリ表現は，一次元の自明な表現を除けば，すべて無限次元なのである！彼らの研究を契機として，リー群の無限次元 (ユニタリ) 表現の研究が本格化する．数理物理，調和解析，不変式論，保型形式，特殊関数論，代数解析 (線形微分方程式)，組合せ論，代数幾何，特異点論など，さまざまな分野の研究と相互に交流・刺激しあって，表現論は現代数学において調和のとれた最も実り多い研究分野のひとつとして定着し，発展・成長を続けている．

さて，有限群 (もっと一般にコンパクト群) 上の任意の類関数は, 既約表現の指標の (無限) 一次結合として表される．このことは, 群の共役類 (軌道) の幾何的構造と表現の間に深いつながりがあることを示唆してい

る．この繋がりを解き明かすこと，すなわち表現に対する**軌道理論**を創ることが，群の表現論における最も基本的かつ重要な問題のひとつであり，研究の指導原理になっている．

ハイゼンベルグ群などを含む単連結冪零リー群 G に対しては，そのリー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の双対空間 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ 上の余随伴軌道と既約ユニタリ表現の同値類が一対一対応に対応しているという完全な形で，表現の軌道理論が，Kirillov [14] により構築されている．

一方，実半単純リー群 G は，特殊直交群 $SL(n,\mathbb{R})$，不定値内積に関するユニタリ群 $U(p,q)$ や直交群 $SO_0(p,q)$，シンプレクティック群 $Sp(n,\mathbb{R})$ 等，物理学の立場からも重要な行列群を含み，幾何的・代数的に豊穣な内部構造をもつ．また，対称空間に推移的に働く変換群として，大きな対称性を備えている．半単純群 G の既約許容表現は，Langlands [17] や Knapp-Zuckerman [15] らの精緻な研究により，G の尖的放物型部分群からの表現の誘導をとおして分類・構成されることが知られている．この分類は，各既約表現にリー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の半単純元を通る随伴軌道 (半単純軌道) を結びつけている．

では，リー代数の冪零元を通る随伴軌道，つまり冪零軌道は，半単純リー群の表現にどのように関与するのだろうか? 普遍包絡環の原始イデアルの分類, 無限次元表現に対する階数・台・サイクルの概念の導入，あるいは群上の保型形式の理論などの進展に伴い, リー代数の冪零軌道が既約表現の退化性や大きさを特徴づける不変量として重要であることが, 1980 年前後から特に強く認識されるようになった (e.g., [1]).　また，1990 年頃からは，極小冪零軌道の量子化により得られる極小表現や “ユニポテント表現” の構成に関する研究も盛んになってきている．

2　Harish-Chandra 加群： リー代数の表現への移行

いま，G を連結で線形な実半単純リー群とし，その極大コンパクト部分群を K で表す．群 G のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上への連続な (無限次元) 既約許容表現 π は，部分群 K が有限に作用する部分空間:

$$\boldsymbol{X} := \{v \in \mathcal{H} \mid \dim \langle \pi(K)v \rangle < \infty\}$$

の上に，複素化リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, および，群 K の複素化 $K_{\mathbb{C}}$ が働く既約な **Harish-Chandra** $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-**加群**を定める．ユニタリ化可能でない加群の完備化に関わる位相的な性質を除けば，対応 $\pi \mapsto \boldsymbol{X}$ は G の既約

許容表現の同値類と既約 Harish-Chandra 加群の同型類の間に一対一対応を与えることが知られている．

3　随伴多様体と等方表現

この節では，既約な Harish-Chandra 加群 $\boldsymbol{X}$ に付随した冪零不変量を代数 (幾何) 的な手法により構成しよう．

$K_{\mathbb{C}}$ のリー代数 $\mathfrak{k}$ が定める $\mathfrak{g}$ の対称分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \quad ([\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k})$$

とするとき，複素簡約群 $K_{\mathbb{C}}$ はベクトル空間 $\mathfrak{p}$ に随伴表現により作用する．さらに，部分空間 $\mathfrak{p}$ に含まれる $\mathfrak{g}$ の冪零元全体 $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ は，有限個の $K_{\mathbb{C}}$-軌道からなることが知られている．

いま，$\boldsymbol{X}$ を既約な Harish-Chandra 加群とする．$\boldsymbol{X}$ の既約 $K_{\mathbb{C}}$-部分加群 (τ, V_τ) から $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の標準フィルターづけ

$$U_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}1 \subset U_1(\mathfrak{g}) \subset \cdots \subset U_n(\mathfrak{g}) \subset \cdots$$

を経由して，$K_{\mathbb{C}}$-安定な ($\boldsymbol{X}$ の) 良いフィルターづけ

$$\boldsymbol{X}_n := U_n(\mathfrak{g}) V_\tau \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad \boldsymbol{X}_n \nearrow \boldsymbol{X}$$

が定まる．$\mathfrak{g}$ の対称線形環 $S(\mathfrak{g})$ と群 $K_{\mathbb{C}}$ が整合的に働く次数つき加群

$$\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X} := \bigoplus_{n \geq 0} \boldsymbol{X}_n / \boldsymbol{X}_{n-1}$$

を構成する．この有限生成 $(S(\mathfrak{g}), K_{\mathbb{C}})$-加群 $\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X}$ の台

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{X}) := \mathrm{Supp}(\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X})$$

は，τ のとり方に依らず，$\mathfrak{p}$ における冪零 $K_{\mathbb{C}}$-軌道たちいくつかの合併集合がなすアフィン代数多様体となる．これを $\boldsymbol{X}$ の**随伴多様体**と呼ぶ．言い換えれば，$\mathcal{V}(\boldsymbol{X})$ は，$\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X}$ の零化イデアル $I_\tau := \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})}(\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X})$ に対応する代数多様体に他ならない:

(3.1) $$\mathcal{V}(\boldsymbol{X}) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid f(Y) = 0 \quad (f \in I_\tau)\} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{p}).$$

ここで $S(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ 上の多項式関数のなす環と標準的に同一視している．

より精密に，$\mathcal{V}(\boldsymbol{X}) = \cup_i \overline{\mathcal{O}_i}$ ($\mathcal{O}_i$ たちは同一次元の冪零 $K_{\mathbb{C}}$-軌道) を多様体 $\mathcal{V}(\boldsymbol{X})$ の既約分解とする．このとき，各既約成分 $\overline{\mathcal{O}_i}$ における $\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X}$ の重複度 m_i を付加することで得られる随伴サイクル

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}) := \sum_i m_i \cdot [\overline{\mathcal{O}_i}] \tag{3.2}$$

は，いわば，$\boldsymbol{X}$ の第一次近似を与える冪零不変量といえよう．ここで重要なことは，

『随伴サイクル $\mathcal{C}(\boldsymbol{X})$ に現れる各重複度 m_i は，単なる自然数ではなく，当該既約成分 $\overline{\mathcal{O}_i}$ に属する一般的な冪零元 $X_i \in \mathcal{O}_i$ の固定部分群 $K_{\mathbb{C}}(X_i)$ $:= Z_{K_{\mathbb{C}}}(X_i)$ が働く**等方表現**の次元として捉えられる』

という事実である ([24], [25])．

随伴多様体は群 G のリー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の冪零元を含んではいないが，次の対応により，$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の冪零 G-軌道と結びついている．

定理 3 (Kostant-Sekiguchi 対応 [22])． $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ における冪零 G-軌道と $\mathfrak{p}$ における冪零 $K_{\mathbb{C}}$-軌道との間には，$\mathfrak{sl}_2$-トリプルのケーリー変換をとおした，一対一対応が存在する．

$(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-加群の冪零不変量である随伴多様体は，冪零軌道の量子化の研究に礎を与える．また，随伴多様体 (サイクル) は，群 G の表現の超関数指標の波面集合あるいは漸近台 (サイクル) といった実リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ における冪零不変量と，Kostant-Sekiguchi 対応をとおして対応していることが近年証明されており (Schimd-Vilonen, Rossmann)，無限次元表現の Fourier 解析的な側面のひとつを代数的な手法で理解するためにも，Harish-Chandra 加群と等方表現や随伴多様体の関係について，研究の深化が望まれる．そのためには次の二つの問題が基本的になろう：

問題 4． Harish-Chandra 加群の等方表現や随伴サイクルを記述すること．

問題 5． 随伴多様体や等方表現が元々の既約 Harish-Chandra 加群 (G の既約表現) の如何なる表現論的性質を制御しているかを明らかにすること．

二番目の問題に関して，随伴多様体 $\mathcal{V}(\boldsymbol{X})$ は，$\boldsymbol{X}$ を $\mathfrak{g}$ の冪零部分リー代数の普遍包絡環上の加群とみなした際に (表現の制限)，有限性と局所自由性に関する基本的な性質を制御していることが，これまでの研究から明らかになっている ([7], [26])．

4　等方表現と勾配型微分作用素

ユニタリ最高ウェイト表現や離散系列表現 (より一般に Zuckerman 導来関手加群) など，楕円型半単純軌道に対応する既約許容表現の Harish-Chandra 加群 $\boldsymbol{X}$ は，既約な随伴多様体をもつ．つまり，$\mathcal{V}(\boldsymbol{X})$ がただひとつの冪零 $K_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathcal{O}$ の閉包となる: $\mathcal{V}(\boldsymbol{X}) = \overline{\mathcal{O}}$．本節以降では，このような場合に焦点を絞り，問題 4, 5 に向けての最近の研究 ([27], [28], [29]) を概観する．

さて，次数つき $(S(\mathfrak{g}), K_{\mathbb{C}})$-加群 $\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X}$ の同型類は，$\boldsymbol{X}$ のフィルターづけを定める $K_{\mathbb{C}}$-型 τ の選び方に依存し，一意には定まらない．しかし，$\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X}$ の零化イデアル $I_\tau = \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})}(\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X})$ が根基イデアル ($\overline{\mathcal{O}}$ に対応する素イデアル) となるような τ が存在するとき，$\boldsymbol{X}$ の等方表現 $\mathcal{W}$ は，点 $X \in \mathcal{O}$ に対応する $S(\mathfrak{g})$ の極大イデアル $\mathfrak{m}(X)$ を用いて，

$$\mathcal{W} = (\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X})/\mathfrak{m}(X)(\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X}) \tag{4.1}$$

と表される．このとき，$K_{\mathbb{C}}$-有限な双対空間 $(\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X})^*$ を核として実現する ($\mathfrak{p}$ 上の) **勾配型不変微分作用素**

$$\mathcal{D} : S(\mathfrak{p}) \otimes V_\tau^* \longrightarrow S(\mathfrak{p}) \otimes U^* \quad (U \text{ は有限次元 } K_{\mathbb{C}}\text{-加群}) \tag{4.2}$$

の主表象写像 $\boldsymbol{\sigma}$ と随伴多様体・等方表現を，次のように関係づけることができる．

命題 6. $I_\tau = \sqrt{I_\tau}$ と仮定する．$\mathcal{D}$ の主表象写像 $\boldsymbol{\sigma} : \mathfrak{p} \times V_\tau^* \to U^*$ が定める $\mathfrak{p}$ 上の $K_{\mathbb{C}}$-ベクトル束

$$\mathcal{F} = \coprod_{X \in \mathfrak{p}} \mathrm{Ker}\, \boldsymbol{\sigma}(X, \cdot)$$

について，次が成り立つ．

(1) $\mathcal{F}$ の台は随伴多様体 $\mathcal{V}(\boldsymbol{X})$ に等しい．すなわち，

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{X}) = \{X \in \mathfrak{p} \mid \mathrm{Ker}\, \boldsymbol{\sigma}(X, \cdot) \neq \{0\}\}. \tag{4.3}$$

(2) 点 $X \in \mathcal{O}$ における $\mathcal{F}$ のファイバー空間 $\mathrm{Ker}\, \boldsymbol{\sigma}(X, \cdot)$ に等方表現の双対 $\mathcal{W}^*$ が生じる:

$$\mathcal{W}^* \simeq \mathrm{Ker}\, \boldsymbol{\sigma}(X, \cdot). \tag{4.4}$$

さて，ユニタリ最高ウェイト表現あるいは離散系列の Harish-Chandra 加群 $\boldsymbol{X}$ は，唯一の端的 $K_{\mathbb{C}}$-型 τ をもつ．このとき，零化イデアル $I_\tau = \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})}(\mathrm{gr}_\tau \boldsymbol{X})$ が根基イデアルであることを証明することができる．正確には，最高ウェイト表現の場合は Joseph [10] の結果である．離散系列については，Blattner 重複度公式を用いて等式 $I_\tau = \sqrt{I_\tau}$ を示す ([27], [29])．ただし，その証明には，端的 $K_{\mathbb{C}}$-型 τ の最高ウェイト (Blattner パラメータ) がコンパクト・ルートが定める壁たちから十分離れているという仮定が要る．

いずれにせよ，ユニタリ最高ウェイト加群や (大部分の) 離散系列表現に対して，等方表現を特定するために命題 6 を用いることが可能になる．それぞれの場合に，どのような結果が得られているかを説明しよう．

4.1 ユニタリ最高ウェイト加群の場合

リーマン対称空間 G/K が既約であり，かつ，G-不変複素構造をもつとき，群 G をエルミート型単純リー群という．このとき，G のリー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は，次のいずれかと同型になる：

$$\mathfrak{su}(p,q),\ \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}),\ \mathfrak{so}^*(2n),\ \mathfrak{so}(2n-1,2),\ \mathfrak{so}(2n,2),\ \mathfrak{e}_{6(-14)},\ \mathfrak{e}_{7(-25)}.$$

上の各実リー代数は，それぞれ，A_{p+q-1}, C_n, D_n, B_n, D_{n+1}, E_6, E_7 型の複素単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の実型であり，Cartan による記法に倣えば，

$$\mathrm{AIII},\quad \mathrm{CI},\quad \mathrm{DIII},\quad \mathrm{BI},\quad \mathrm{DI},\quad \mathrm{EIII},\quad \mathrm{EVII}$$

と表される．

いま，エルミート対称空間 G/K 上の不変複素構造が誘導する $\mathfrak{g}$ の三角分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_-$ と書く．ここで，

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-, \quad \mathfrak{p}_\pm \subset \mathcal{N}(\mathfrak{p}), \tag{4.5}$$

は $K_{\mathbb{C}}$-加群 $\mathfrak{p}$ の既約分解を与える．また，$\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-$ は，$\mathfrak{g}$ の冪零かつ可換な部分リー代数であり，それぞれ，G/K の原点 eK における正則，反正則接空間と自然に同型となる，

$\mathfrak{p}_+ (\subset \mathfrak{p})$ に含まれる $K_{\mathbb{C}}$-軌道の構造は単純である．例えば，AIII 型の簡約群 $U(p,q)$ の場合，$\mathfrak{p}_+$ は p 行 q 列の複素行列全体 $M_{p,q}(\mathbb{C})$ と同型であり，群 $K_{\mathbb{C}} \simeq GL(p,\mathbb{C}) \times GL(q,\mathbb{C})$ の作用は

$$\mathrm{Ad}(k)X = k_1 X k_2^{-1}, \quad k = (k_1,k_2) \in GL(p,\mathbb{C}) \times GL(q,\mathbb{C}),\ X \in M_{p,q}(\mathbb{C}),$$

により与えられる．従って，線形代数学で学ぶように，行列 X の階数によって，$\mathfrak{p}_+$ は $\min(p,q)+1$ 個の $K_{\mathbb{C}}$-軌道に分かれる．一般に，対称空間 G/K の階数を r とするとき，$\mathfrak{p}_+$ は，

$$\overline{\mathcal{O}_0} \subset \overline{\mathcal{O}_1} \subset \cdots \subset \overline{\mathcal{O}_r} = \mathfrak{p}_+$$

なる $r+1$ 個の冪零 $K_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_r$ $(\mathcal{O}_0 = \{0\})$ に分解することが知られている．

さて，$\boldsymbol{X}$ をユニタリ最高ウェイト $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-加群とする．すなわち，$\boldsymbol{X}$ は G の既約ユニタリ表現の Harish-Chandra 加群であって，$\mathfrak{p}_+ \cdot v = 0$ なるベクトル $v \in \boldsymbol{X}\backslash\{0\}$ をもつ．このような $\boldsymbol{X}$ は，Enright-Howe-Wallach [5] により，完全に分類されている．また，ユニタリ最高ウェイト加群 $\boldsymbol{X}$ の随伴多様体は，ある番号 $m(\boldsymbol{X})$, $0 \leq m(\boldsymbol{X}) \leq r$, があって，

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{X}) = \overline{\mathcal{O}_{m(\boldsymbol{X})}} \tag{4.6}$$

の形に表されることを確かめるのも容易である (cf. [10])．

では，$\boldsymbol{X}$ の等方表現 $\mathcal{W}$ をどのように求めることができるか？リー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ が古典型 AIII, CI, DIII の場合には，Weil 表現 (Fock 模型) のテンソル積を分解してユニタリ最高ウェイト加群 $\boldsymbol{X}$ を構成し (コンパクトな dual pair の理論)，等方表現を特定する ([28, Section 5])．なお，dual pair が安定域にある場合の重複度 $\dim \mathcal{W}$ については，西山・落合・谷口 [20] による結果がある．例外型を含む残りの場合には，命題 6 と落合・加藤による重複度の記述結果 ([12], [11]) を併せ用いることで，特異的な (i.e., $\mathcal{V}(\boldsymbol{X}) \neq \mathfrak{p}_+$) ユニタリ最高ウェイト加群 $\boldsymbol{X}$ の等方表現を求めることができる．詳細は多分に技術的なのでここでは省略するが，特に，次の統一的な結果 (ただし証明は case-by-case の考察による) が得られている．

定理 7. 特異なユニタリ最高ウェイト加群の等方表現は常に既約であり，それらは具体的に特定できる．

4.2　離散系列表現の場合

半単純リー群 G の既約ユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ が離散系列表現であるとは，表現 π の行列要素が G 上のハール測度 dg に関して二乗可積分:

$$\int_G |(\pi(g)v, v)|^2 dg < \infty \quad (v \in \mathcal{H})$$

であるときをいう．例えば，符号数 $(1,1)$ のユニタリ群

$$G = SU(1,1) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} \simeq SL(2,\mathbb{R})$$

の離散系列表現は次のようにして得られる．群 G は単位開円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ に一次分数変換

$$g \cdot z := \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \quad (g \in G,\ z \in D)$$

により作用する．この作用を量子化して，$n = 2, 3, \ldots,$ に対して，

$$||\varphi||^2 := \int_D |\varphi(z)|^2 \frac{dxdy}{(1-|z|^2)^{2-n}} < \infty \quad (z = x + \sqrt{-1}y)$$

なる正則関数 $\varphi : D \to \mathbb{C}$ のなすヒルベルト空間 $\mathcal{H}_n$ 上に，G の離散系列表現 π_n が，

$$(\pi_n(g^{-1})\varphi)(z) = (\overline{\beta} z + \overline{\alpha})^n \varphi(g \cdot z) \quad (g \in G, \varphi \in \mathcal{H}_n),$$

により生じる．逆に，G の任意の離散系列表現は，π_n あるいはその複素共役 $\overline{\pi}_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ のいづれかとユニタリ同値である．

なお，$\mathcal{H}_n$ に対応する Harish-Chandra 加群 $\boldsymbol{X}_n$ は，単項式 $1, z, z^2, \ldots$ を基底とする $\mathcal{H}_n$ の部分ベクトル空間に他ならず，$K_{\mathbb{C}} \simeq GL(1,\mathbb{C})$ の作用に関して，ウェイト $n + 2p$ $(p = 0, 1, \ldots)$ の一次元表現 χ_{n+2p} たちの直和となっている (最低ウェイト加群):

$$\boldsymbol{X}_n \simeq \bigoplus_{p \geq 0} \chi_{n+2p}.$$

一方で，$\overline{\pi}_n$ に付随する Harish-Chandra 加群は最高ウェイト $-n$ をもつ．

しかし，上の特別な群 $SU(1,1)$ の場合を除けば，最高ウェイトも最低ウェイトも持たない離散系列表現が数多く存在する．一般に，半単純リー群 G が離散系列表現をもつためには，階数条件 $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K$ が成り立つことが必要十分条件であり，この場合，離散系列表現のパラメータづけが Harish-Chandra により得られている．

いま，上記の階数条件を仮定する．コンパクト群 K の極大トーラス T の複素化リー代数 $\mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系を Δ で表す．Harish-Chandra パラメータ $\Lambda \in \mathfrak{t}^*$ をもつ離散系列加群 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_\Lambda$ を考えよう．Λ が支配的な形式

となるように Δ の正ルート系 Δ^+ を定める：$\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \mid \langle \Lambda, \alpha \rangle > 0\}$. さらに，コンパクトでない正 (resp. 負) ルートが定めるルート空間の和を，$\mathfrak{p}_+$ (resp. $\mathfrak{p}_-$) で表す．このとき，$\mathfrak{p}$ の分解(4.5) は依然成り立つが，ここでの $\mathfrak{p}_\pm$ は $K_{\mathbb{C}}$-不変とは限らない．

定理 8 (cf. [27]). 離散系列 Harish-Chandra 加群 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_\Lambda$ の随伴多様体は，

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{Ad}(K_{\mathbb{C}})\mathfrak{p}_- = \overline{\mathcal{O}}$$

である．ここに，$\mathcal{O}$ は $\mathfrak{p}_-$ と稠密に交わる唯一の冪零 $K_{\mathbb{C}}$-軌道である．

次に等方表現の話に移ろう．$\boldsymbol{X}$ の唯一の端的 $K_{\mathbb{C}}$-型を (τ, V_τ) とする．パラメータ Λ は十分正則 (regular) であるものとする．本節の最初に述べたとおり，$\boldsymbol{X}$ に付随する等方 $K_{\mathbb{C}}(X)$-加群 $\mathcal{W}$ $(X \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}_-)$ の双対は，勾配型不変微分作用素 (cf. [9]) の主表象写像 $\boldsymbol{\sigma} : \mathfrak{p} \times V_\tau^* \to U^*$ の核 $\mathrm{Ker}\, \boldsymbol{\sigma}(X, \cdot)$ と同型である (cf. (4.4)).

結果を述べるため，Δ^+ に含まれるコンパクト単純ルートたちの集合を S とする．S に対応する $K_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群 Q_c のレビ分解を $Q_c = LU_c$ で表す．すなわち，L の単純ルート系が S である．

定理 9 ([29]). V_τ^* の最低ウェイトベクトル v^* から生成される V_τ^* の既約な部分 L-加群を $V_\tau^*(L)$ とする．このとき，$V_\tau^*(L)$ が生成する $K_{\mathbb{C}}(X)$-加群 $\mathcal{U}$ は，$\boldsymbol{X}$ の等方表現の双対加群 $\mathcal{W}^*$ の部分表現である．

$$\mathcal{U} := \langle V_\tau^*(L) \rangle_{K_{\mathbb{C}}(X)} \subset \mathrm{Ker}\, \boldsymbol{\sigma}(X, \cdot) \simeq \mathcal{W}^* \quad (X \in \mathfrak{p}_- \cap \mathcal{O}). \tag{4.7}$$

さらに，ある種の緩やかな仮定のもとに，$\mathcal{U}$ が $\mathcal{W}^*$ のなかで**十分大きな部分表現**であることも分かる．

最近，野原俊介 [21] は，$G = U(n, 1)$ の任意の離散系列表現に対して，等号 $\mathcal{U} = \mathrm{Ker}\, \boldsymbol{\sigma}(X, \cdot)$ が成り立つことを，V_τ^* の Gelfand-Zetlin 基底を用いて，具体的に証明した．旗多様体上の D-加群としての離散系列の実現を用いた随伴サイクルの研究がある (Chang [3], [4])．我々の手法は，リーマン対称空間 G/K 上での離散系列の構成法 ([9]) に基づき，等方表現への初等的アプローチを与えようとするものとも位置付けられる．

5 一般化 Whittaker 模型と等方表現

一般に，(τ, V_τ) を既約 $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-加群 $\boldsymbol{X}$ に現れる $K_{\mathbb{C}}$-型とし，$\boldsymbol{X}$ 上の $K_{\mathbb{C}}$-有限な一次形式のつくる双対 Harish-Chandra 加群 $\boldsymbol{X}^*$ が，対称空間

G/K 上の等質ベクトル束 $G \times_K V_\tau^*$ で定義された G-不変微分作用素 $\tilde{\mathcal{D}}$ の $K_\mathbb{C}$-有限な核空間として実現されるとせよ．このとき，C^∞ に誘導された種々の G-加群 Γ への $(\mathfrak{g}, K_\mathbb{C})$-加群 $\boldsymbol{X}$ の埋め込み $\boldsymbol{X} \hookrightarrow \Gamma$ は，$\tilde{\mathcal{D}}$ が空間 $\mathrm{Hom}_K(V_\tau, \Gamma)$ 上に自然に誘導する微分作用素 $\tilde{\mathcal{D}}_\Gamma$ の解と対応する (核型原理; [28, Section 1]):

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}, K_\mathbb{C}}(\boldsymbol{X}, \Gamma) \simeq \mathrm{Ker}\, \tilde{\mathcal{D}}_\Gamma. \tag{5.1}$$

この原理に基づき，ユニタリ最高ウェイト加群に対して，複素解析的な冪零 $K_\mathbb{C}$-軌道 $\mathcal{O}_m$ $(0 \le m \le r)$ に付随した一般化 Whittaker 模型と等方表現との間の相互関係を考察する．これをより詳しく説明しよう．$\mathcal{O}_m$ から Kostant-Sekiguchi 対応 (定理 3) をとおして定まる実リー代数 $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ の冪零軌道を $\mathcal{O}_m^\mathbb{R}$ とする．次に，$\mathcal{O}_m^\mathbb{R}$ に付随した**一般化された Gelfand-Graev 誘導表現** $\Gamma(\mathcal{O}_m^\mathbb{R})$ を，[13] に従って，次のように構成する．まず，$X'_m \in \mathcal{O}_m^\mathbb{R}$ なる $\mathfrak{sl}_2$-トリプル (X'_m, H'_m, Y'_m) を $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ のなかにとる (Jocobson-Morozov):

$$[H'_m, X'_m] = 2X'_m, \quad [H'_m, Y'_m] = -2Y'_m, \quad [X'_m, Y'_m] = H'_m.$$

次に，半単純元 H'_m の随伴作用による $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ の固有空間分解

$$\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{g}_\mathbb{R}(-2)_m \oplus \mathfrak{g}_\mathbb{R}(-1)_m \oplus \mathfrak{g}_\mathbb{R}(0)_m \oplus \mathfrak{g}_\mathbb{R}(1)_m \oplus \mathfrak{g}_\mathbb{R}(2)_m$$

($\mathfrak{g}_\mathbb{R}(j)_m$ は $\mathrm{ad}\, H'_m$ の j-固有空間) から生じる二段階の冪零部分リー代数

$$\mathfrak{n}(m) := \mathfrak{g}_\mathbb{R}(1)_m \oplus \mathfrak{g}_\mathbb{R}(2)_m$$

を考える．$\mathfrak{n}(m)$ 上の一次形式

$$\mathfrak{n}(m) \ni Z \mapsto -B(Z, Y'_m) \in \mathbb{R} \quad (B \text{ は } \mathfrak{g}^\mathbb{R} \text{ の Killing 形式})$$

と，Kirillov の軌道法で対応する $N(m) := \exp \mathfrak{n}(m)$ の既約ユニタリ表現を ζ_m で表す．このとき，表現 ζ_m から C^∞ に誘導された G の表現が，我々の研究の対象 $\Gamma(\mathcal{O}_m^\mathbb{R}) = \mathrm{Ind}_{N(m)}^G(\zeta_m)$ である．ここでは，軌道 $\mathcal{O}_m^\mathbb{R}$ に対する $\Gamma(\mathcal{O}_m^\mathbb{R})$ の構成を述べたが，任意の冪例 G-軌道 $\mathcal{O}^\mathbb{R}$ $(\subset \mathfrak{g}_\mathbb{R})$ に対して，一般化された Gelfand-Graev 表現 $\Gamma(\mathcal{O}^\mathbb{R})$ を，全く同様に構成することができる ([13]).

既約 Harish-Chandra 加群 $\boldsymbol{X}$ が，一般化された Gelfand-Graev 表現 $\Gamma(\mathcal{O}^\mathbb{R})$ の部分表現として実現可能であるとき，$\boldsymbol{X}$ は冪零軌道 $\mathcal{O}^\mathbb{R}$ に対する**一般化 Whittaker 模型**をもつという．一般化 Whittaker 模型の研究は，保型形式のフーリエ級数展開の係数と深く関わり，至極重要である．

定理 10 ([28]; AIII 型の場合は [23]). $\boldsymbol{X}$ をユニタリ最高ウェイト加群とする．$(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-加群の埋め込み $\boldsymbol{X} \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{O}^{\mathbb{R}}_m)$ $(m = 0, \ldots, r)$ の重複度が零でない有限の値をとるのは，丁度 $m = m(\boldsymbol{X})$ の場合のみであり，そのとき，線形同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}}}(\boldsymbol{X}, \Gamma(\mathcal{O}^{\mathbb{R}}_{m(\boldsymbol{X})})) \simeq \mathcal{W}^* \tag{5.2}$$

が成り立つ．

この定理より，随伴多様体と等方表現 $\mathcal{W}$ は，ユニタリ最高ウェイト加群の一般化 Whittaker 模型 $\boldsymbol{X} \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{O}^{\mathbb{R}}_m)$ を制御していることが分かる．(一般化)Whittaker 模型と波面集合・原始イデアル等との関係について，最大 Gelfand-Kirillov 次元をもつ Harish-Chandra 加群や複素リー群の場合に，Kostant [16] や松本 ([18], [19]) による研究がある．定理 10 は，ユニタリ最高ウェイト表現という，特別ではあるが特異性・退化度の高い実リー群の表現について，事情が明快であることを示している．

おわりに

サイエンス・トピックスへの寄稿を引き受けたのは，昨年の夏のことだった．多くの方に楽しんで読んで貰えるように，できれば初等的で面白い話題を書いてみたいと考えているうちに，本務に忙殺され，時間だけが過ぎてしまった．結局のところ，私自身のささやかな仕事を，研究背景を込めて解説・紹介することにした.「自然科学の最新の研究状況を掲示する」という本欄の目的のひとつにあわせた形だが，かなり専門的な内容となってしまい，楽しんで読める記事を書きたいという当初の願いが達成されているかは，全く自信がない．読者諸兄のご批判を仰ぎたい．しかしながら，もしこの小文を読んで (あるいは「眺めて」)，リー群・リー代数の表現に少しでも興味をもってくれる人がいれば，私にとっては大きな喜びである．

参考文献

[1] W. Borho and J.-L. Brylinski, Differential operators on homogeneous spaces. III: Characteristic varieties of Harish-Chandra modules and of primitive ideals, Invent. Math., **80** (1986), 1–68.

[2] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 568–640.

[3] J.-T. Chang, Characteristic cycles of holomorphic discrete series, Trans. Amer. Math. Soc., **334** (1992), 213–227.

[4] J.-T. Chang, Characteristic cycles of discrete series for $\mathbb{R}$-rank one groups, Trans. Amer. Math. Soc., **341** (1994), 603–622.

[5] T.J. Enright, R. Howe, and N.R. Wallach, A classification of unitary highest weight modules, *in* “Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982; P.C.Trombi ed.)”, Progress in Math., Vol. **40**, Birkhäuser, 1983, pp.97–143.

[6] I. M. Gelfand and M. A. Naimark, Unitary representations of the Lorentz group (Russian), Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **11**, (1947), 411–504.

[7] A. Gyoja and H. Yamashita, Associated variety, Kostant-Sekiguchi correspondence, and locally free $U(\mathfrak{n})$-action on Harish-Chandra modules, J. Math. Soc. Japan, **51** (1999), 129–149.

[8] 平井武，線型代数と群の表現 I, II, 朝倉書店, 2001.

[9] R. Hotta and R. Parthasarathy, Multiplicity formulae for discrete series, Invent. Math., **26** (1974), 133–178.

[10] A. Joseph, Annihilators and associated varieties of unitary highest weight modules, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **25** (1992), 1–45.

[11] 加藤昇平, Unitary highest weight module の Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数について, 77 pages, 九州大学大学院数理学研究科, 修士論文, 2000.

[12] S. Kato and H. Ochiai, The degrees of orbits of the multiplicity-free actions, Astérisque, **273** (2001), 139–158.

[13] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representation and Ennola duality, *in* “Algebraic groups and related topics”, Advanced Studies in Pure Math., **6** (1985), 175–206.

[14] A. A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups (Russian), Uspehi Mat. Nauk, **17** 1962 no. 4 (106), 57–110.

[15] A. W. Knapp and G. J. Zuckerman, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups, Ann. of Math. (2), **116** (1982), 389–455; II, ibid., **116** (1982), 457–501; Correction: ”Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups” [Ann. of Math. (2), **116** (1982), 389–501]. Ann. of Math. (2), **119** (1984), 639.

[16] B. Kostant, On Whittaker vectors and representation theory, Invent. Math., **48** (1978), 101–184.

[17] R. P. Langlands, On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, mimeographed notes, Institute for Advanced Studies, 1973. Published *in*: "Representation Theory and Harmonic analysis on Semisimple Lie Groups (J. Sally and D. A. Vogan eds.)", Mathematical surveys and monographs, **31**, Amer. Math. Soc., 1989, pp. 101–170.

[18] H. Matumoto, $C^{-\infty}$-Whittaker vectors for complex semisimple Lie groups, wave front sets, and Goldie rank polynomial representations, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **23** (1990), 311–367.

[19] H. Matumoto, $C^{-\infty}$-Whittaker vectors corresponding to a principal nilpotent orbit of a real reductive linear Lie group, and wave front sets. Compositio Math. **82** (1992), 189–244.

[20] K. Nishiyama, H. Ochiai and K. Taniguchi, Bernstein degree and associated cycles of Harish-Chandra modules – Hermitian symmetric case, Astérisque, **273** (2001), 13–80.

[21] 野原俊介，自然表現とのテンソル積にみる一般線型群の既約表現，76 pages, 北海道大学大学院理学研究科，修士論文，2002.

[22] J. Sekiguchi, Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. J. Math. Soc. Japan, **39** (1987), 127–138.

[23] 田川正明，ユニタリ化可能最高ウェイト表現の一般化された Whittaker 模型, 82 pages, 京都大学大学院理学研究科，修士論文，1998.

[24] D.A. Vogan, Associated varieties and unipotent representations, *in*: "Harmonic Analysis on Reductive Groups (W. Barker and P. Sally eds.)", Progress in Math., Vol. **101**, Birkhäuser, 1991, 315–388.

[25] D. A. Vogan, The method of coadjoint orbits for real reductive groups, *in*: "Representation Theory of Lie Groups (eds. J. Adams and D. Vogan)", 177–238, IAS/Park City Mathematics Series **8**, AMS, 2000.

[26] H. Yamashita, Criteria for the finiteness of restriction of $U(\mathfrak{g})$-modules to subalgebras and applications to Harish-Chandra modules: A study in relation to the associated varieties, J. Funct. Anal., **121** (1994), 296–329.

[27] H. Yamashita, Description of the associated varieties for the discrete series representations of a semisimple Lie group: An elementary proof by means of differential operators of gradient type, Comment. Math. Univ. St. Paul., **47** (1998), 35–52.

[28] H. Yamashita, Cayley transform and generalized Whittaker models for irreducible highest weight modules, Astérisque, **273** (2001), 81–137.

[29] H. Yamashita, Isotropy representation attached to Harish-Chandra module with irreducible associated variety, in preparation.

[30] 山下博, 行列の魅力, 高校生のための数学春季講座 (北海道大学) 講義資料, 23 pages, 2001.