

カタラン数の語る数学の世界

-Enumerative Combinatorics 入門-

寺尾 宏明

July 31, 2006

高校生のための数学講座

CONTENTS

- クイズ出題
- カッコのつけ方講座
- カタラン数とは？
- 逆ポーランド記法
- ある経路の数
- 多角形の三角分解
- カタラン数の規則性

CONTENTS

- 生成関数 (= 母関数)
- 二項定理と二項係数
- 無限小数と無限和
- 自然対数の底 e
- 博士の愛した数式
- 帽子の取り違い数
- クイズ当選者抽選 (賞品あり)

1. クイズ出題

この部屋にいる人で11のグループを作しましょう。ひとつのグループは7～8人程度から成るはずですが、一番右側に座っている人にグループリーダーになってもらいます（名刺を配ったり回収したりするだけです。）

グループ内で、白紙の名刺を配って全員の氏名を書いてもらい回収しておきます。

名刺をよく切ってから、最後にグループのメンバーに配布します。そのとき、誰も自分の名前の書かれたカードを受け取らなかったグループを「取り違いグループ」と命名しましょう。さて、そのとき、11のグループの中で「取り違いグループ」はいくつあるのでしょうか？

以下の4つの選択肢から、予想して名前とともに名刺に記入して下さい。

A. 0～2組 B. 3～5組 C. 6～8組 D. 9～11組

私も「正解」は知りませんが、どの結果が一番起こりそうか、は判断できません（それが正解になる確率が高いのですが、保証はできません。）

2. カッコのつけ方講座

3文字 (a, b, c) の場合 :

$(ab)c$

$a(bc)$

2通り

同様に、「太った男の子」は2通りに解釈される。

$(ab)c \longleftrightarrow$ 「(太った男)の子」

$a(bc) \longleftrightarrow$ 「太った(男の子)」

2通り

4文字 (a, b, c, d) の場合 :

$((ab)c)d$

$(a(bc))d$

$a((bc)d)$

$a(b(cd))$

$(ab)(cd)$

5通り

3. カタラン数とは？

カタラン数 (Catalan number) は ,

$C_n = n$ 文字の積のカッコのつけ方の総数

と定義される .

$$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 5, C_5 = 14,$$

$$C_6 = 42, C_7 = 132, C_8 = 429 \dots$$



カタラン数の研究をしたベルギーの数学者 .

Eugène Charles Catalan (1814-1894)

4. 逆ポーランド記法

逆ポーランド記法は、カッコを全く用いないで式を表す記号である（ただし、掛け算のための記号（ここでは、* は用いる。）たとえば、

$$(ab)c = ab * c*$$

$$a(bc) = abc **$$

$$(ab)(cd) = ab * cd **$$

逆ポーランド記法は、日本語の語順と一致している。
つまり

逆ポーランド記法 \leftrightarrow 日本語の表現

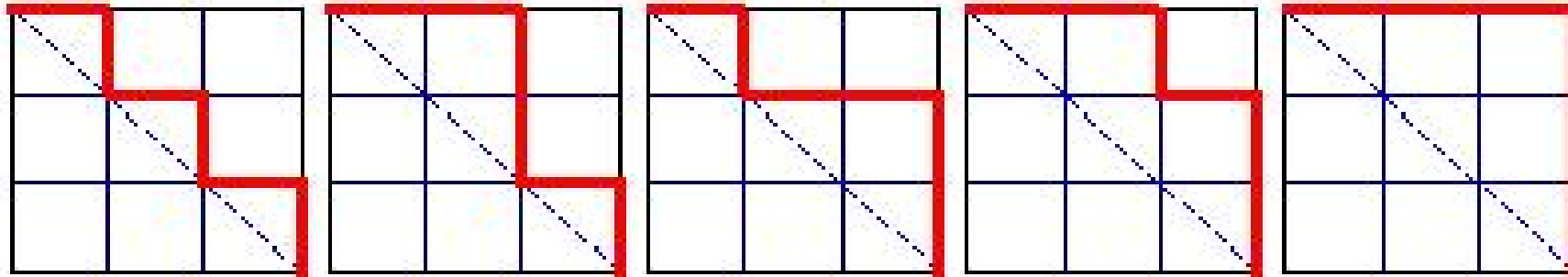
$(ab)c = ab * c * \leftrightarrow$ a と b をかけたものに c をかける

$a(bc) = abc * * \leftrightarrow$ a に b と c をかけたものをかける

$(ab)(cd) = ab * cd * * \leftrightarrow$ a と b をかけたものに c と d をかけたものをかける

* \longleftrightarrow かける

5. ある経路の数



↓
 $ab * c * d *$

↓
 $abc **d *$

↓
 $ab * cd **$

↓
 $abc * d **$

↓
 $abcd **$

↓
 $((ab)c)d$

↓
 $(a(bc))d$

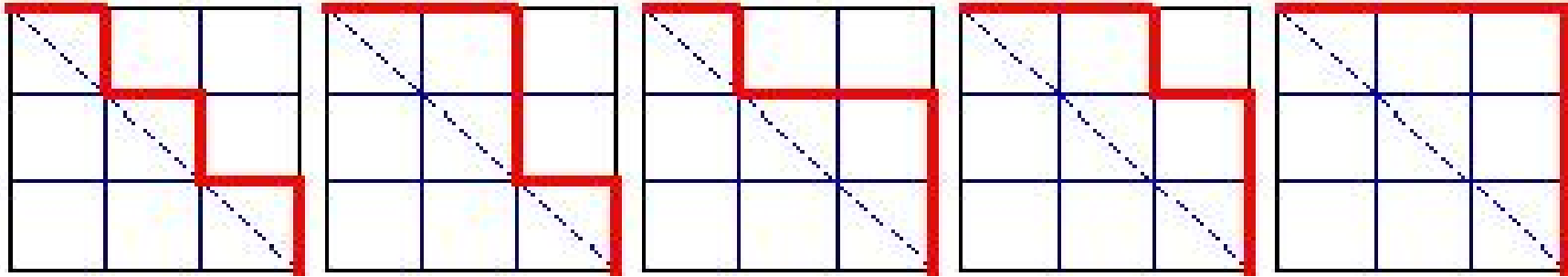
↓
 $(ab)(cd)$

↓
 $a((bc)d)$

↓
 $a(b(cd))$

— $\leftrightarrow b, c, d, e, \dots$ (数)

⌊ $\leftrightarrow *$ (掛け算)



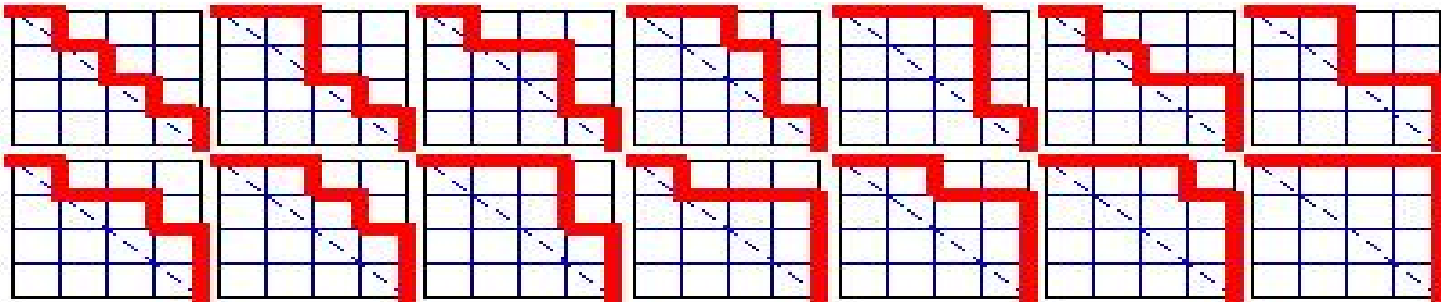
C_n (カタラン数) は、たて横 n 本ずつの格子に沿った左上端点から右下端点までの最短経路で、左下半分には決して入らないような 経路の数に等しい

$$C_4 = 5$$

$((ab)c)d)e$ $((a(bc))d)e$ $((ab)(cd))e$ $(a((bc)d))e$ $(a(b(cd)))e$ $((ab)c)(de)$ $(a(bc))(de)$



$ab * c * d * e *$ $abc * * d * e *$ $ab * cd * * e *$ $abc * d * * e *$ $abcd * * * e *$ $ab * c * de * *$ $abc * * de * *$



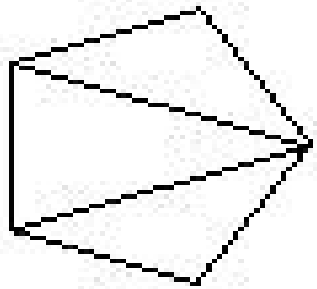
$ab * cd * e * *$ $abc * d * e * *$ $abcd * * e * *$ $ab * cde * * *$ $abc * de * * *$ $abcd * e * * *$ $abcde * * * *$



$(ab)((cd)e)$ $a(((bc)d)e)$ $a((b(cd))e)$ $(ab)(c(de))$ $a((bc)(de))$ $a(b((cd)e))$ $a(b(c(de)))$

$$C_5 = 14$$

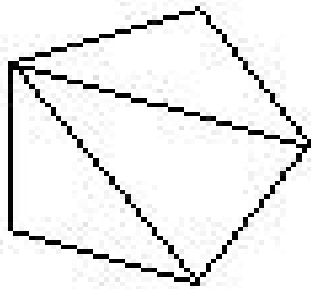
6. 多角形の三角分解



$ab * cd **$



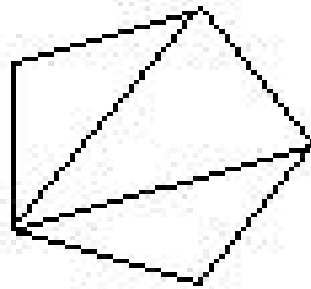
$(ab)(cd)$



$ab * c * d *$



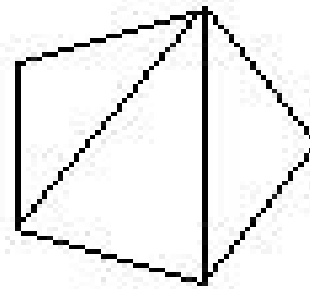
$(a(bc))d$



$abcd ***$



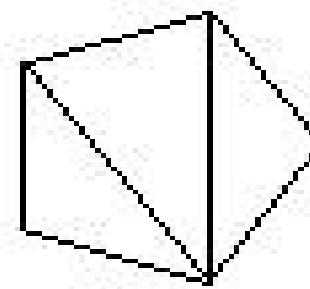
$(a(b(cd)))$



$abc * d **$



$a((bc)d)$

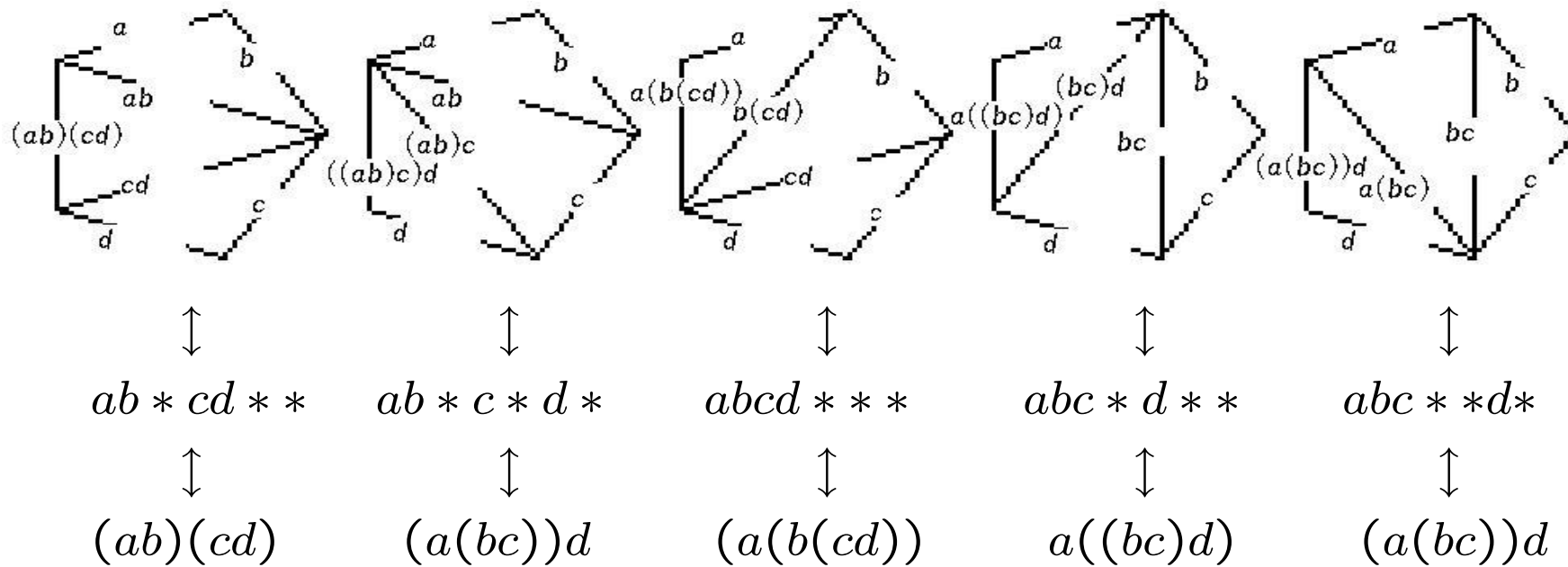


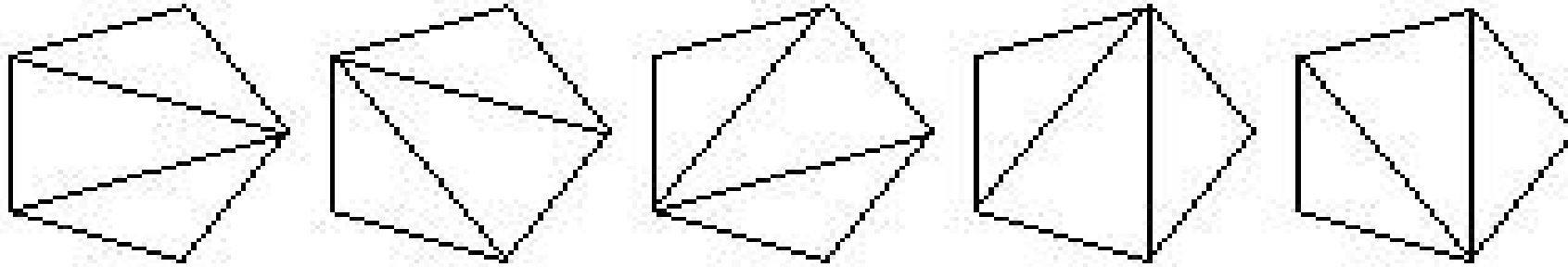
$abc ** d *$



$(a(bc))d$

6. 多角形の三角分解





C_n (カタラン数) は, $(n + 1)$ 角形を三角形に分割するやり方の数に等しい

$$C_4 = 5$$

7. カタラン数の規則性

もう一度, カタラン数の具体的な値を眺めてみよう. 何かの規則性が発見できるだろうか?

$$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 5, C_5 = 14,$$

$$C_6 = 42, C_7 = 132, C_8 = 429 \dots$$

実は, 次のような規則性がある.

$$C_1 = 1, C_2 = 1,$$
$$C_2 = 1, C_1 = 1,$$

$$1 \times 1 + 1 \times 1 = 2 = C_3$$

$$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 2,$$
$$C_3 = 2, C_2 = 1, C_1 = 1,$$

$$1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 5 = C_4$$

$$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 5,$$
$$C_4 = 5, C_3 = 2, C_2 = 1, C_1 = 1,$$

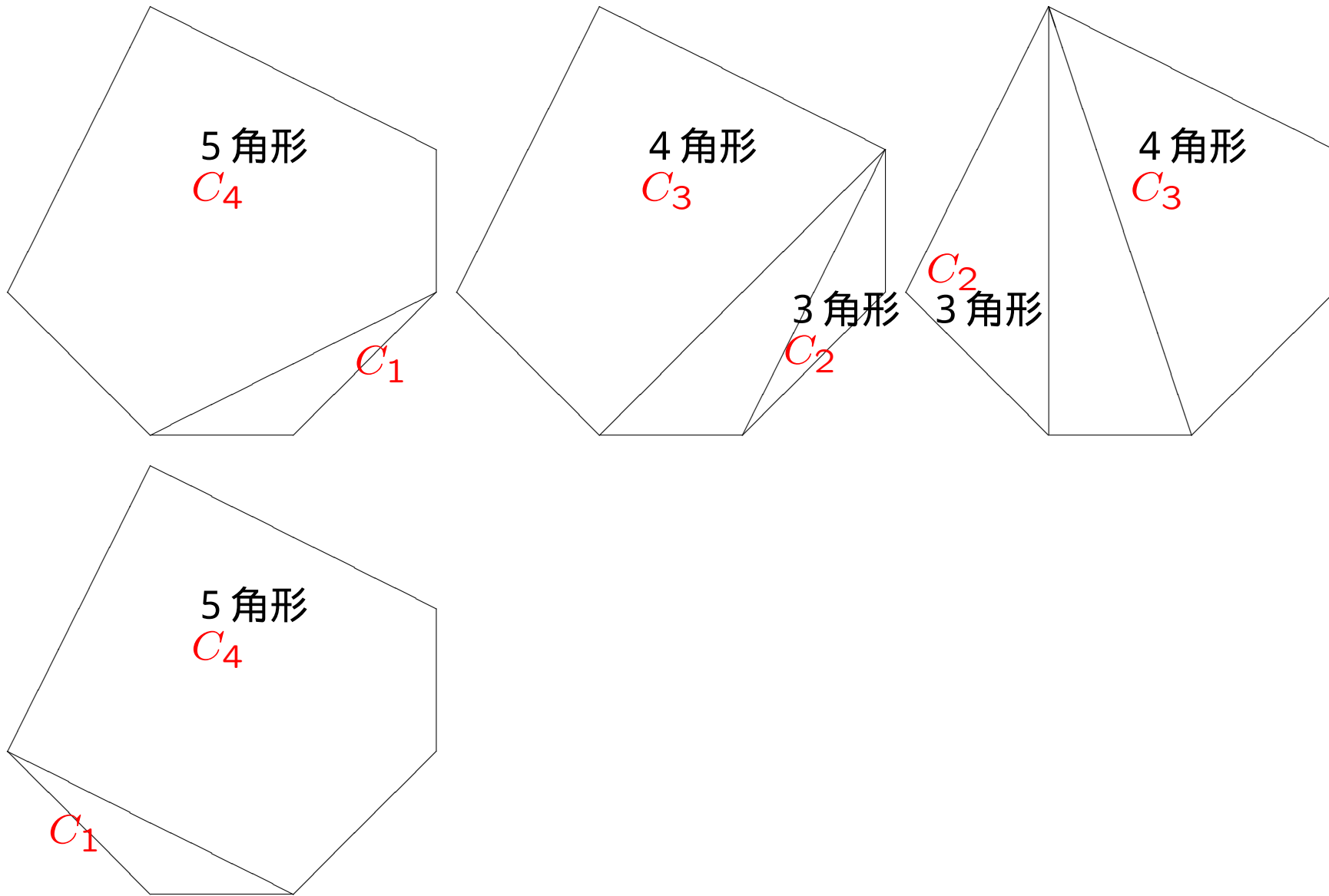
$$1 \times 5 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 5 \times 1 = 14 = C_5$$

$$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 5, C_5 = 14,$$
$$C_5 = 14, C_4 = 5, C_3 = 2, C_2 = 1, C_1 = 1,$$

$$1 \times 14 + 1 \times 5 + 2 \times 2 + 5 \times 1 + 14 \times 1 = 42 = C_6$$

このような不思議な関係式が成り立つ理由は何か？

図で説明しよう．



$$C_5 = C_4C_1 + C_3C_2 + C_2C_3 + C_1C_4$$

8. 生成関数（母関数）

カタラン数は無限にたくさん数からできている．全部のカタラン数を紙に書こうとすれば，無限にたくさんの紙を必要とする．

このような状況にもかかわらず，**ひとつの生成関数（母関数）**には，**無限にたくさん** の情報が詰め込められている．

どんなものなのかを説明しよう．

まず、多項式は

$$x^2 + 5x + 3$$

のようなものである（ x は、普通は変数と呼ばれる）。

この多項式の項が無限に続くものをべき級数と呼ぶ。たとえば

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

のような例がある。ここで、「 \dots 」は、この級数が無限に続いていることを表す。

ここで，カタラン数の生成関数とは，

$$\begin{aligned}y &= C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots \\ &= x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + \dots\end{aligned}$$

のことである．つまり， x^n の係数（ $= x^n$ に掛けてある数）がちょうどカタラン数 C_n に等しいような関数である．

たくさんのばらばらの真珠の粒に糸を通してひとつのネックレスにするように，取り扱いやすく，持ち運びやすいものになる．

取り扱いやすくなっていることのひとつの証明は、以下の議論を見て欲しい。

$$\begin{aligned}y^2 &= (x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + \dots) \\ &\quad \times (x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + \dots) \\ &= x^2 + (1 \times 1 + 1 \times 1)x^3 + (1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1)x^4 \\ &\quad + (1 \times 5 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 5 \times 1)x^5 + \dots \\ &= x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + \dots \\ &= y - x\end{aligned}$$

したがって、

$$y^2 - y + x = 0$$

が成立している。

これは y に関する2次方程式！ 解の公式がある！！

結論 . よって , 2 次方程式の解の公式より ,

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

のどちらかが , カタラン数の生成関数 (母関数) であるが , 実は ,

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

の方が **カタラン数の生成関数 (母関数)** であることがわかる .

この短い式の中に , $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 5, C_5 = 14,$
 $C_6 = 42, C_7 = 132, C_8 = 429 \dots$ の情報が全部含まれている .

生成関数の例として有名なものをいくつか挙げると、

数列 (= 真珠の粒)

生成関数 (= ネックレス)

 a_n

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

C_n (カタラン数)

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

$a + bn$ (等差数列)

$$\frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2}$$

ar^n (等比数列)

$$\frac{a}{1-rx}$$

$\frac{1}{n!}$ (ただし, $n!$ は 1 から n までの積)

e^x (指数関数)

mC_n (二項係数)

$$(1+x)^m$$

9. 二項定理と二項係数

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

$$(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

$$(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

係数の規則性は明らかであろう (**パスカルの三角形**)

二項定理とは、

$$(1 + x)^m = {}_m C_0 + {}_m C_1 x + {}_m C_2 x^2 + {}_m C_3 x^3 + {}_m C_4 x^4 + \dots$$

二項係数 ${}_m C_n$ のひとつの解釈は、

「 m 人の中から、 n 人を選出する方法の個数」

である（高校ではこれが定義）

具体的な値は、

$${}_m C_n = \frac{m!}{(n!)(m-n)!}$$

たとえば、

$${}_5 C_2 = \frac{5!}{(2!)(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1)(3 \times 2 \times 1)} = \frac{120}{2 \times 6} = 10$$

ここで、**カタラン数** に戻る．カタラン数の生成関数は

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

だった．

実は、**二項定理** は、 m が分数の場合も正しくて、

$$\sqrt{1 - 4x} = (1 - 4x)^{1/2}$$

に適用すると、

$$\begin{aligned}(1 - 4x)^{1/2} &= 1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - 10x^4 - 28x^5 - \dots \\ &= 1 - ({}_2C_1)x - \frac{1}{3}({}_4C_2)x^2 - \frac{1}{5}({}_6C_3)x^3 - \frac{1}{7}({}_8C_4)x^4 - \dots\end{aligned}$$

と計算できて（細かい計算は略す）

カタラン数の一般項の公式

$$C_n = \frac{1}{n} (2n-2C_{n-1})$$

が求まる．

たとえば，

$$C_4 = \frac{1}{4} ({}_6C_3) = \frac{1}{4} \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1)(3 \times 2 \times 1)} = \frac{20}{4} = 5$$

となる．

たとえば，等比数列の生成関数 $\frac{a}{1-rx}$ を用いると，

$$\begin{aligned} 0.\dot{9} &= 0.\underset{9}{9}\dots \\ &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{9}{1000000} \\ &\quad + \frac{9}{10000000} + \frac{9}{100000000} + \dots \\ &= \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 \end{aligned}$$

となる．これは完全に正しい式である． $(0.\dot{9} = 1)$

しかし，たとえば， $a = 1, r = -1, x = 1$ とすると，

$$\begin{aligned} &1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &= 1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となってしまう，ちょっとおかしい．

もっとすごいのは、

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$$

などというのもあって、かなりおかしい。

無限和については、きちんとした「収束」の概念がないと間違いやすいので注意が必要である（大学で学ぶ。）

11. 自然対数の底

さて、数列 $\frac{1}{n!}$ の生成関数である e^x を考える。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

ここで $x = 1$ とすると、

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

となり、この数を**自然対数の底**という。

これは、 π (円周率) と並んで、数学で最も大切な定数のひとつである。大体、どのくらいの数になるかを実験してみよう。

実験で見たように，

$$e = 2.7182818284590 \dots$$

もっとたくさん計算すると，

$$e = 2.$$

71828182845904523536028747135266249775724709369995
95749669676277240766303535475945713821785251664274
27466391932003059921817413596629043572900334295260
59563073813232862794349076323382988075319525101901
15738341879307021540891499348841675092447614606680
82264800168477411853742345442437107539077744992069
55170276183860626133138458300075204493382656029760
67371132007093287091274437470472306969772093101416
...

12. 博士の愛した数式

「博士の愛した数式」は、小川洋子氏作の小説でベストセラーになり、映画化もされた（私と同じ苗字の俳優が博士の役を演じている。）

そこで出て来る数式とは、**オイラーの公式**と呼ばれ、

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

という形をしている。 $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$ （**虚数単位**）である。

小説のごく一部を引用すると、

「どこにも円は登場しないのに、予期せぬ宙から π が e のもとに舞い下り、恥ずかしがり屋の i と握手をする。彼らは身を寄せ合い、じっと息をひそめているのだが、一人の人間が1つだけ足算をした途端、何の前触れもなく世界が転換する。すべてが0に抱き留められる。」

と極めて文学的にこの公式を描写している。

オイラーの公式は、

$$e^{\pi i} = -1$$

とも表される。指数関数 e^x が、数列 $\frac{1}{n!}$ の生成関数であることを用いれば、
オイラーの公式は、

$$\begin{aligned} -1 &= 1 + \frac{\pi i}{1!} + \frac{(\pi i)^2}{2!} + \frac{(\pi i)^3}{3!} + \frac{(\pi i)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \dots\right) + i \left(\frac{\pi}{1!} - \frac{\pi^3}{3!} - \dots\right) \end{aligned}$$

と表すこともできる。

博士の愛した数式が正しそうかどうか実験

正しそうな感じがする（もちろん，実際正しい．）

13. 帽子の取り違い数

さて，ここで，最初に出したクイズに戻ろう．

何人かの人が，レストランで食事をした．全員が帽子をかぶっていて，店に入るときに帽子を預けた．

全員が，食事のときにワインを飲んで酔っ払ってしまい，帰りには，全員が自分の帽子を他人の帽子の区別がつかなくなっていて，**全くランダム**に帽子をかぶって帰宅した，とするとき，一体どのくらいの頻度で，**誰も自分の帽子を家に持ち帰った人がいない**，ということが起こるか？

2 人の場合は , $\frac{1}{2}$ (AbBa)

3 人の場合は , $\frac{2}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$ (AbBcCa, AcBaCb)

4 人の場合は , $\frac{9}{24} = \frac{12}{24} - \frac{4}{24} + \frac{1}{24}$ (AbBcCdDa, AbBdCaDc, AcBaCdDb, AcBdCbDa, AdBaCbDc, AdBcCaDb, AbBaCdDc, AcBdCaDb, AdBcCbDa)

5 人の場合は , $\frac{44}{120} = \frac{60}{120} - \frac{20}{120} + \frac{5}{120} - \frac{1}{120}$

(詳しくは述べないが) この右辺は , いわゆる「包除原理」で説明される .

m 人の場合，誰も自分の帽子を家に持ち帰った人がいない，という確率は，

$$1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{1}{m!}$$

と計算されるが，これは， $e^{-1} = \frac{1}{e}$ の式を途中で切ったものに他ならない．

どのくらい早く， $\frac{1}{e}$ に近づくか？ 実験

$m = 7$ 程度で十分に $\frac{1}{e}$ に近いことがわかる（小数点以下 4 桁まで一致する．）

この確率が， m を大きくしたとき， $\frac{1}{e}$ に近づくことは，

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow \frac{1}{e}$$

からもわかる．

14. クイズ当選者抽選（賞品あり）

さて，ここで，最初に出したクイズに戻ろう．各グループの規模は7～8人なので，問題の確率は，ほとんど， $\frac{1}{e}$ （ほぼ，36.79%）である．したがって，11グループに対しては，取り違えグループ数の予測数

4.06グループ程度であるが，これはあくまで平均値であって，今回はどうなるだろうか．

さて，現実はどうでしょうか？

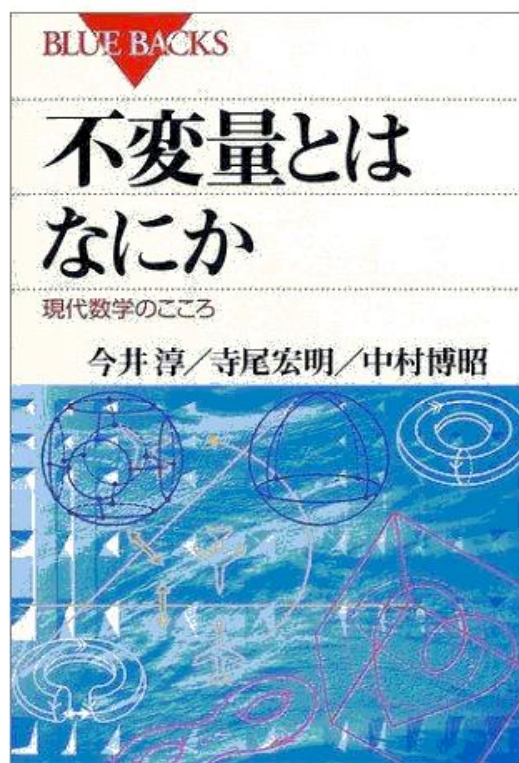
A. 0～2組 B. 3～5組 C. 6～8組 D. 9～11組

リーダーの手元の名刺を裏にしてかき混ぜてから、グループのメンバーが1枚ずつ取って下さい。

リーダーは自分の名刺を選んだ人が何人いるかを集計して下さい。

抽選で当たった方への「賞品」は

不変量とはなにか 現代数学のこころ (新書) 246ページ 講談社
ブルーバックス (2002/11) (今井淳・寺尾宏明・中村博昭著)



ご清聴有難うございました

おしまい