基礎数学 C　冬休み宿題

問 0.1 数列 $\{a_n\}$ が α に収束すること（$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$），および，数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散すること（$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$）の定義を述べよ．数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ が収束列であるとし，$c,d \in \mathbb{R}$ は定数とする．このとき数列 $\{ca_n + db_n\}$ は収束して，$\lim_{n\to\infty}(ca_n + db_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n + d\lim_{n\to\infty} b_n$ であることを示せ．

問 0.2 コーシー列は収束することを，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理「有界な数列は収束する部分列を持つ」を用いて示せ．

問 0.3
1. 上極限 $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ の定義を述べよ．

2. 次を示せ：$\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n$

問 0.4 次の級数の収束・発散を調べよ（*(1)* はダランベール判定法等，*(2)* は $\sum \frac{1}{n+1}$ と比較）

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

問 0.5 点 a を含む開区間 I 上で関数 $f(x)$ が定義されているとする．$f(x)$ が点 a で連続であること（$\epsilon\delta$ 論法）と次が同値あることを示せ：a に収束するような I 上の任意の数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{f(a_n)\}$ は必ず $f(a)$ に収束する．

問 0.6 点 a を含む開区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が点 a で連続であって，$f(a) > 0$ であるとする．このとき，点 a を含み I に含まれる十分小なる開区間上で $f(x) > 0$ となることを示せ．

問 0.7 $f(x), g(x)$ は $I = [a,b]$ において連続とする．I 上のすべての有理数 $x \in I \cap \mathbb{Q}$ に対して $f(x) = g(x)$ であれば、I 上のすべての点 x で $f(x) = g(x)$ であることを示せ．

問 0.8 $(0,+\infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ が $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = \ell$ を満たすとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ であることを示せ．

問 0.9 有界な閉区間上の連続関数は一様連続であることを背理法を用いて証明せよ．

問 0.10 $I = (0,1]$ 上で定義された関数 $g(x) = \frac{1}{x}$ および $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ は一様連続かどうか調べよ．

問 0.11 閉区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ は開区間 (a,b) 上で微分可能とし，端点 $x = a, b$ で片側微分可能とし，$f'_+(a) < 0$，$f'_-(b) > 0$ であるとする．このとき，$f'(c) = 0$ となる点 $c \in (a,b)$ が存在することを示せ．

注）導関数 $f'(x)$ は存在するが連続とは仮定していないので，$f'(x)$ に「中間値の定理」は適用できない．

問 0.12 $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とする．

1. $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$ を満たす $a<c<b$ が少なくとも一つ存在することを示せ．

2. $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とおくとき，*(1)* を用いて $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ を示せ．

問 0.13 1. $a>0$，$0<\alpha\leq 1$ とする．$g(x) = (x-a)^\alpha - (x^\alpha - a^\alpha)$ とおくと，$x \geq a$ の範囲で $g(x) \geq 0$ であることを示せ．

2. 関数 $f(x)$ は $I=(0,\infty)$ 上の C^1 級関数であるとし，ある定数 A と定数 α $(0<\alpha\leq 1)$ が存在して，$|f'(x)| \leq Ax^{\alpha-1}$ $(\forall x \in I)$ を満たすとする．このとき，任意の $a,b\in I$ $(a\neq b)$ に対して $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^\alpha}\right| \leq \dfrac{A}{\alpha}$ が成り立つことを示せ．

問 0.14 逆正接関数 $y=\arctan x (=\tan^{-1} x)$ について，

1. 次を帰納法により証明せよ：

$$y^{(n)} = (n-1)!\sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right)\cos^n y = (n-1)!\sin\left(n\arctan x + \frac{n\pi}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{n}{2}}$$

2. その原点におけるテイラー級数展開は $|x|\leq 1$ において収束し，$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1} + \cdots$ を示せ．

問 0.15 1. $f(x), g(x)$ が区間 $[a,\infty)$ 上で連続であり，ある $K>0$ があって任意の $x\geq K$ に対して $|f(x)|\leq g(x)$ を満たすとする．このとき，広義積分 $\int_a^\infty g(x)dx$ が収束するならば，広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ も収束することを示せ．

2. 次の広義積分が収束することを示せ．ただし，a,k は定数で $0<a<1,\ k>0$ を満たし，関数 $g(x)$ は区間 $[1,\infty)$ 上で連続かつ有界（ある正数 M があって $|g(x)|<M$）とする．

$$(1)\quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^a(1+x)}, \qquad (2)\quad \int_1^\infty g(x)\frac{\log x}{x^{1+k}}\,dx$$

問 0.16 次の広義積分に関する式を証明せよ．n は自然数で $a,p,q>0$ とし，$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx (= \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})) = \sqrt{\pi}/2$ は既知とする．

$$(1)\quad \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \qquad (2)\quad \int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$ *(1)* を置換積分

$$(3)\quad \int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ （部分積分）

$$(4)\quad I_1 := \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},\quad I_2 := \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$(5)\quad \int_0^\infty x^p e^{-ax^q}\,dx = \frac{1}{qa^{(p+1)/q}}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right) \qquad (6)\quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^q}}dx = \frac{1}{q}B\left(\frac{p}{q},\frac{1}{2}\right)$$

基礎数学 C　冬休み宿題　解答例

問 0.17 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．すなわち，任意の $\epsilon > 0$ に対して，
$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}_0\ s.t.\ \forall n \geq n_1\ [\ |a_n - \alpha| < \epsilon\ ]$ および $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}_0\ s.t.\ \forall n \geq n_2\ [\ |b_n - \beta| < \epsilon\ ]$.
$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ とおく．$\forall n \geq n_0$ に対して
$|(ca_n + db_n) - (c\alpha + d\beta)| \leq |c| \cdot |a_n - \alpha| + |d| \cdot |b_n - \beta| < (|c| + |d|) \cdot \epsilon$.
よって $\lim_{n\to\infty}(ca_n + db_n) = c\alpha + d\beta$.

問 0.18 $\{a_n\}$ をコーシー列とする：$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\ s.t.\ \forall m, n \geq n_0 \left[\ |a_m - a_n| < \epsilon\ \right]$.
特に $\epsilon = 1$ に対してこのような n_0 を取ると，$m \geq n_0$ に対して，$|a_m| - |a_{n_0}| < |a_m - a_{n_0}| < 1$ より，$|a_m| < |a_{n_0}| + 1$．そこで，$M := \max\{\ |a_0|, |a_1|. \cdots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1\ \}$ とおけば，すべての n について $|a_n| \leq M$，つまり $\{a_n\}$ は有界な数列である．したがって，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理より，数列 $\{a_n\}$ は収束する部分列をもつ．この部分列を $\{a_{n(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ $(n(0) < n(1) < \cdots)$ とし，その極限値を $\alpha = \lim_{k\to\infty} a_{n(k)}$ とおく．すなわち，
$\forall \epsilon > 0\ \ \exists\, n_1 \in \mathbb{N}_0\ s.t.\ \forall\, k \geq n_1 \left[\ |a_{n(k)} - \alpha| < \epsilon\ \right]$.
一方，$\{a_n\}$ はコーシー列であったから，同じ ϵ に対して
$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}_0\ s.t.\ \forall\, m, n \geq n_2 \left[\ |a_m - a_n| < \epsilon\ \right]$.
$N := \max\{n_1, n_2\}$ とおく．$n(N) > N$ に注意すれば，$n \geq N$ なる任意の n に対して，

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n(N)}| + |a_{n(N)} - \alpha| < 2\epsilon.$$

これは $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を意味する．証明終わり．

問 0.19 *(1)* まず，$\{a_n\}$ が有界である場合，その上極限を次で定義する：

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} b_m, \qquad b_m := \sup\{\ a_m, a_{m+1}, \cdots\ \} = \sup_{n \geq m} a_n.$$

実際，$b_m \geq b_{m+1} \geq \inf a_n$ なので，$\{b_m\}$ は下に有界な単調減少数列だから極限値が存在する．なお，$\{a_n\}$ が上に有界でなければ $b_m = +\infty$，すなわち $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と定義し，$\{a_n\}$ が上に有界だが下に有界でなければ $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と定義する．
(2) $\alpha := \varlimsup_{n\to\infty} a_n$ とおく：$\forall \epsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}_0\ s.t.\ \forall m \geq n_0\ [\ \alpha - \epsilon < b_m < \alpha + \epsilon\ ]$.
（ここで $b_m = \sup_{n \geq m} a_n$）．とくに $b_{n_0} < \alpha + \epsilon$ より，$a_n < \alpha + \epsilon\ (\forall n \geq n_0)$ である．
　いま，$A := |a_1 - \alpha| + \cdots + |a_{n_0-1} - \alpha|$ とおくと，$\forall n \geq n_0$ に対して

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha = \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_0-1} - \alpha)}{n} + \frac{(a_{n_0} - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} < \frac{A}{n} + \epsilon.$$

A は n によらない定数だから，n を十分大きくとれば $\frac{A}{n}$ はいくらでも小さくできる．よって，$\frac{A}{m} < \epsilon$ かつ $m \geq n_0$ なる m に対して，$\sup_{n \geq m} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \alpha + 2\epsilon$.
ここで極限 $m \to \infty$ を取れば，上極限の定義から，$\varlimsup_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \alpha + 2\epsilon$.
この左辺はもはや n_0 に依らない値であって ϵ と無関係だから，$\epsilon \to 0$ とすれば

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \alpha = \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

問 0.20 *(1)* $c_n = \frac{1}{n!}$ とおく．$\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1$．よって，ダランベールの判定法より $\sum c_n$ は収束．*(2)* $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{n+1}$ であり，調和級数は発散すること（$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$）および挟みうちの原理より，与式は $+\infty$ に発散する．

問 0.21 まず，$f(x)$ が点 $x = a$ で連続とする：$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$．すなわち，
$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\; s.t.\; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \cdots\cdots (c)$
いま，a に収束する任意の I 上の数列 $\{a_n\}$ をとる：$a_n \to a\ (n \to \infty)$．このとき，上記の δ に対して，$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0\; s.t.\, \forall n \geq n_0\ [\ |a_n - a| < \delta\ ]$．
よって (c) より $|f(a_n) - f(a)| < \epsilon$．以上より，$\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$ が示された．
次に $f(x)$ が点 $x = a$ で連続でない，すなわち
$\exists\, \epsilon > 0\ \ \forall\, \delta > 0\ \ \exists\, x \in I\; s.t.\; [\ |x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon\ ] \quad \cdots\cdots (nc)$
であるとする．各自然数 n に対して $\delta = \frac{1}{n}$ に対する (nc) より
$|a_n - a| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(a_n) - f(a)| \geq \epsilon$
であるような $a_n \in I$ が取れる．この数列 $\{a_n\}$ は a に収束するが数列 $\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない．よって対偶が示された．

問 0.22 $f(x)$ が点 $x = a$ で連続であるから，
$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\; s.t.\; |x - a| < \delta \implies f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$
$f(a) > 0$ より，特に $\epsilon = \frac{f(a)}{2}$ に対して δ を取り，$I' := (a - \delta, a + \delta) \cap I$ とおけば，任意の $x \in I'$ に対して $0 < \frac{f(a)}{2} = f(a) - \epsilon < f(x)$ だから，I' 上で $f(x) > 0$ である．

問 0.23 $F(x) := f(x) - g(x)$ とおくと，$F(x)$ も I 上で連続である．$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ 上で稠密だから，任意の $a \in I$ に対して a に収束する有理数列 $\{a_n\}$（$a_n \in I \cap \mathbb{Q}$）がある．仮定より $f(a_n) = g(a_n)$，つまり $F(a_n) = 0$ であって，さらに F の連続性より，$F(a) = \lim_{n \to \infty} F(a_n) = 0$．従って I 上で恒等的に $F(x) \equiv 0$ となり，$f(x) = g(x)$ が示された．

問 0.24 任意に $\epsilon > 0$ を取る．条件より，$\exists K_0 > 0\; s.t.\, \forall x > K_0 \implies |f(x) - f(x-1) - \ell| < \epsilon$．
$K_0 > 1$ にとる．閉区間 $[K_0 - 1, K_0]$ 上で連続関数 $f(x)$ は有界となるから，ある定数 M を選んでこの区間上で $|f(x)| \leq M$ であるとする．$x > K_0$ なる x に対して $x - m \leq K_0 < x - m + 1$ となる非負整数 $m = m(x)$ を取ると，$K_0 - 1 < x - m \leq K_0$ だから $|f(x - m)| \leq M$．さらに $x, x-1, \cdots, x-m+1 > K_0$ だから

$$|f(x) - m\ell| \leq |f(x) - f(x-1) - \ell| + \cdots + |f(x-m+1) - f(x-m) - \ell| + |f(x-m)|$$

より，$|f(x) - m\ell| < m\epsilon + M$ を得る．いま K_0, M は定数なので $\frac{K_0}{x}, \frac{M}{x} \to 0\ (x \to +\infty)$，つまり，十分大なる $K (\geq K_0)$ があって，$x \geq K$ なる任意の x に対して $\frac{K_0}{x} < \epsilon$ かつ $\frac{M}{x} < \epsilon$ にできる．したがって，任意の $x \geq K$ に対して，$\frac{x-m}{x} < \frac{K_0}{x} < \epsilon$，$\frac{m}{x} < 1$，$|f(x) - m\ell| < m\epsilon + M$ に注意すれば，

$$\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| \leq \left|\frac{f(x) - m\ell}{x}\right| + \left|\frac{m\ell - x\ell}{x}\right| < \left|\frac{m\epsilon + M}{x}\right| + |\ell| \cdot \left|\frac{x - m}{x}\right| < \frac{m}{x}\epsilon + \frac{M}{x} + |\ell|\,\epsilon < (2 + |\ell|)\,\epsilon.$$

以上より，$\frac{f(x)}{x} \to \ell\ (x \to \infty)$ が示された．

問 0.25 背理法で示す．$f: I \to \mathbb{R}$ を有界閉区間上の連続関数とし，f は一様連続でないとする．すなわち，$\exists\,\epsilon > 0\ \forall\,\delta > 0\ \exists\,x, \exists\,a \in I\ s.t.\ |x-a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$.
特に $\delta = \frac{1}{n}$ に対して $\exists x_n, \exists a_n \in I\ s.t.\ |x_n - a_n| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n) - f(a_n)| \geq \epsilon \quad \cdots\cdots (*)$
ここで $\{a_n\}$ は I 上の数列なので有界であるから収束する部分列をもつ（ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理）．この部分列とその極限値を次のようにおく：
$\{a_{n(k)}\}_{k=0}^{\infty} \quad (n(0) < n(1) < \cdots), \qquad a_{n(k)} \to \alpha \quad (k \to \infty)$
$\alpha \in I$ であることに注意する．さて，同じ番号による数列 $\{x_n\}$ の部分列を取れば
$\{x_{n(k)}\}_{k=0}^{\infty} \quad (n(0) < n(1) < \cdots), \qquad x_{n(k)} \to \alpha \quad (k \to \infty).$
実際，$|x_{n(k)} - \alpha| \leq |x_{n(k)} - a_{n(k)}| + |a_{n(k)} - \alpha| < \frac{1}{n(k)} + |a_{n(k)} - \alpha| \to 0\ \ (k \to \infty)$ だから，この部分列も α に収束する．

　f の点 α における連続性より，$f(a_{n(k)}) \to f(\alpha)$ および $f(x_{n(k)}) \to f(\alpha)$ だから
$|f(x_{n(k)}) - f(a_{n(k)})| \leq |f(x_{n(k)}) - f(\alpha)| + |f(x_{n(k)}) - f(\alpha)| \to 0\ \ (k \to \infty)$
これは $(*)$ の $|f(x_n) - f(a_n)| \geq \epsilon\ \ (\forall n)$ に反する．よって，f は一様連続である．

問 0.26 区間 $I = (0, 1]$ 上で $f(x) = \frac{1}{x}$ が一様連続であると仮定する．このとき，特に $\epsilon = \frac{1}{2}$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$x, x' \in I,\ |x - x'| < \delta \implies |\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}| < \frac{1}{2}$．ところが，十分大なる n をとって $x = \frac{1}{n}$，$x' = \frac{1}{n+1}$ とすると，$x - x' = \frac{1}{n(n+1)} < \delta$ に出来るが，一方で $|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}| = |n - (n+1)| = 1$．これは矛盾．したがって f は I 上で一様連続でない．
同様に，$a_n = \frac{1}{n\pi}$，$b_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$ とおくと，$a_n - b_n = \frac{1}{n(2n+1)\pi}$ はいくらでも小さくできるが $|g(a_n) - g(b_n)| = |\sin n\pi - \sin(n + \frac{1}{2})\pi| = 1$．したがって g は I 上で一様連続ではない．

問 0.27 $f(x)$ は (a, b) 上で微分可能で端点 a, b で片側微分可能だから，$f(x)$ は有界閉区間 $I := [a, b]$ 上で連続関数である．従って，最大値 $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ と最小値 $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ が存在する．また，端点での片側微分が 0 でないことから，$f(x)$ は定数関数ではない．そこで，次の 2 つの場合分けが考えられる：

（１）最大値・最小値のいずれも開区間 (a, b) 上にはなく，端点 a, b で与えられる．

（２）最大値・最小値の少なくとも一方が開区間 (a, b) の点で与えられる；

（１）の場合，$f(a) = M$ かつ $f(b) = m$，あるいは $f(a) = m$ かつ $f(b) = M$ のいずれかである．
$f(b) = m$ であるとすると，$f(x) - f(b) = f(x) - m \geq 0\ \ (\forall x \in I)$ に注意すれば，

$$f'_{-}(b) = \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$$

となって，$f'_{-}(b) > 0$ の仮定に反する．
$f(a) = m$ であるとすると，$f(x) - f(a) = f(x) - m \geq 0\ \ (\forall x \in I)$ に注意すれば，

$$f'_{+}(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

となって，$f'_{+}(a) < 0$ の仮定に反する．したがって（１）はあり得ない．

（2）の場合，ロルの定理の証明と同じである．$a < \exists c < b$ $s.t.$ $f(c) = M$ であるとする（最小値の場合でも同様）．点 c で $f(x)$ は微分可能であるから $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$ である．$f(x) - f(c) = f(x) - M \leq 0$ $(\forall x \in I)$ に注意すれば，

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \quad f'_-(c) = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

よって，$f'(c) = 0$ となり，題意が示された．

問 0.28 $f(x)$ が定数関数ならば題意は明らかなので，$f(x)$ は定数関数でないとする．有界閉区間上の連続関数は最大値・最小値を持つので，最小値を $m = f(\xi_0)$，最大値を $M = f(\xi_1)$（$\xi_0 \neq \xi_1$, $\xi_0, \xi_1 \in [a, b]$）とする．任意の $a \leq t \leq b$ について $m \leq f(t) \leq M$ だから，

$$f(\xi_0) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \leq M = f(\xi_1)$$

である．ξ_0 と ξ_1 を端点とする閉区間上で連続関数 $f(x)$ を考えて中間値の定理を適用すれば，ξ_0 と ξ_1 の間にある数 c が存在して $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$．よって *(1)* が示された．

次に $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とおき，点 $x_0 \in [a, b]$ において $F'(x_0) = f(x_0)$ を示す．*(1)* より，任意の $x \in [a, b]$ に対して，x_0 と x の間にある数 c で $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt = f(c)(x - x_0)$ を満たすものが存在する．$f(x)$ の点 x_0 における連続性より，

$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ $s.t.$ $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

$0 < |x - x_0| < \delta$ なる x に対して上記の c をとれば，$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(c)$ であり，c は x, x_0 の間にあるから $|c - x_0| < \delta$ なので $|f(c) - f(x_0)| < \epsilon$．したがって，$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| < \epsilon$．つまり，$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c) = f(x_0)$.

問 0.29 *(1)* $\beta := 1 - \alpha$ とおくと条件より $\beta \geq 0$ だから，$x \geq a$ に対して $(x - a)^\beta \leq x^\beta$．よって，$g'(x) = \alpha((x - a)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}) = \alpha((x - a)^{-\beta} - x^{-\beta}) \geq 0$．$g(a) = 0$ なので，$x \geq a$ において $g(x) \geq 0$.（平均値の定理から $g(x) = g(a) + g'(c)(x - a) \geq g(a) = 0$）．

(2) $0 < a < b$ とする．微分積分学の定理，積分の絶対値評価，f の条件，*(1)* 式より

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|f'(x)\right| dx \leq A \int_a^b x^{\alpha-1} dx = \frac{A}{\alpha} |b^\alpha - a^\alpha| \leq \frac{A}{\alpha} |b - a|^\alpha$$

これより題意の式を得る．

問 0.30 $y = \arctan x$ は $x = \tan y$ $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ の逆関数である．この y の範囲で $\cos y > 0$ であって，$\cos y = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ に注意する．さて，$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$ であるから，逆関数の微分法より，$y' = \cos^2 y \quad (= \frac{1}{1+x^2})$ であり，与式の $n = 1$ の場合を得る．いま，帰納法の仮定として $y^{(n)} = (n - 1)! \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \cos^n y$ とする．この両辺を x で微分すれば，

$$\begin{aligned}
y^{(n+1)} &= (n-1)!\left(\cos\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot ny' \cdot \cos^n y + \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot n \cos^{n-1} y \cdot (-\sin y) \cdot y'\right) \\
&= n!\left(\cos\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \cos y - \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \sin y\right) \cos^{n+1} y \\
&= n! \cos\left(ny + \frac{n\pi}{2} + y\right) \cos^{n+1} y \\
&= n! \sin\left((n+1)y + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \cos^{n+1} y
\end{aligned}$$

となって $(n+1)$ 次導関数においても与式が成り立つ．したがって与式が示された．また，これに $\cos y = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ を代入すれば，２番目の等式を得る．
さて，上式より $|y^{(n+1)}| \le n!$ に注意すると，$y = \arctan x$ の原点におけるテイラー展開の $(n+1)$ 次ラグランジュ剰余項は次を満たす：

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|y^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$|x| \le 1$ において $\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$ だから，この x の範囲で，$|R_{n+1}(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$，つまりテイラー無限級数は収束する．$y^{(2k)}(0) = (2k-1)! \sin k\pi = 0$ および $y^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ であるから，

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + \cdots \qquad (|x| \le 1).$$

問 0.31
(1) $g(x)$ が $[a,\infty)$ 上で広義積分可能なので，コーシー条件より $\displaystyle\lim_{p,q\to\infty}\int_p^q g(x)dx = 0$.
$K < p < q$ において，$0 \le \left|\displaystyle\int_p^q f(x)dx\right| \le \displaystyle\int_p^q |f(x)|dx \le \int_p^q g(x)dx$.
よって $\displaystyle\lim_{p,q\to\infty}\int_p^q f(x)dx = 0$ であり，$f(x)$ も広義積分可能.
(2-1) $\dfrac{1}{x^a(1+x)} < \dfrac{1}{x^a}$ および $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a}$ （収束）だから，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^a(1+x)}$ は収束.
$\dfrac{1}{x^a(1+x)} < \dfrac{1}{x^{a+1}}$ および $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{1}{a}$ （収束）だから，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^a(1+x)}$ は収束.
よって $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^a(1+x)}$ は収束する.

(2-2) この広義積分は ∞ における収束が問題．まず，$k > r > 0$ なる r を取る．$k - r > 0$ なので $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{k-r}} = 0$．よって，十分大なる $K > 0$ を取れば，$\forall x > K$ において $\dfrac{\log x}{x^{k-r}} < 1$ にできる．これより，

$$\left|g(x)\frac{\log x}{x^{1+k}}\right| \le M\frac{\log x}{x^{k-r}}\frac{1}{x^{1+r}} \le M\frac{1}{x^{1+r}}.$$

広義積分 $\displaystyle\int_K^\infty \frac{dx}{x^{1+r}}$ は収束するから，$\displaystyle\int_K^\infty g(x)\frac{\log x}{x^{1+k}}dx$ も収束する.

問 0.32
(1) $I_n := \int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ とおく．$I_0 = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$ と部分積分より，$I_n = nI_{n-1} = \cdots = n!$.
(2) $x = \sqrt{\frac{t}{a}}$ と変数変換すれば，$ax^2 = t$ より $2axdx = dt$ なので

$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a^{n+1}}\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = \frac{n!}{2a^{n+1}}.$$

(3) $I_n := \int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx$ とおく．$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ である．部分積分より，

$$I_n = \frac{2n-1}{2a}I_{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2a)^2}I_{n-2} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2a)^n}I_0 = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

(4) $I_1 := \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$，$I_2 := \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ とおく，各々を部分積分すれば，

$$aI_1 = 1 - bI_2, \quad aI_2 = bI_1.\ \text{よって}\ I_1 = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad I_2 = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

(5) $ax^q = t$ とおくと，$x = (\frac{t}{a})^{1/q}$，$dx = \frac{1}{qa^{1/q}}t^{(1/q)-1}dt$.

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{a}\right)^{p/q} e^{-t}\frac{1}{qa^{1/q}}t^{(1/q)-1}dt = \frac{1}{qa^{(p+1)/q}}\int_0^\infty e^{-t}t^{(p+1)/q-1}\,dt = \frac{1}{qa^{(p+1)/q}}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right).$$

(6) $x^q = t$ とおくと，$x = t^{1/q}$，$dx = \frac{1}{q}t^{(1/q)-1}dt$. よって

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^q}}dx = \frac{1}{q}\int_0^1 t^{(p-1)/q}(1-t)^{-1/2}t^{1/q-1}dt = \frac{1}{q}B\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2}\right).$$