基礎数学 C　要点メモ

$\boxed{1}$ 実数の連続性

【実数】 実数の特徴づけ：四則演算・全順序・連続性の公理

$$\mathbb{N}\,(\text{自然数}) \subset \mathbb{Z}\,(\text{整数}) \subset \mathbb{Q}\,(\text{有理数}) \subset \mathbb{R}\,(\textbf{実数}) \subset \mathbb{C}\,(\text{複素数})$$

- $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \neq \emptyset$ の上界，最大値，上限（下界，最小値，下限），有界性

$$u = \sup A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} \bullet\ \forall a \in A\ [\, a \leq u \,] \\ \bullet\ \forall \epsilon > 0\ \ \exists a \in A\ \text{ s.t. }\ u - \epsilon < a \end{cases}$$

$$u = \inf A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} \bullet\ \forall a \in A\ [\, u \leq a \,] \\ \bullet\ \forall \epsilon > 0\ \ \exists a \in A\ \text{ s.t. }\ a < u + \epsilon \end{cases}$$

- 連続性の公理

（甲）$\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A が上に有界ならば上限 $\sup A \in \mathbb{R}$ が存在する．

（ア）アルキメデスの原理：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,　（連続性の公理から導くことができる）

【数列】

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \text{s.t.}\, \forall n \geq N\ \left[\ |a_n - \alpha| < \epsilon\ \right]$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall K > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \text{s.t.}\, \forall n \geq N\ \left[\ K < a_n\ \right]$$

$$\{a_n\}\text{：コーシー列} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \text{s.t.}\, \forall m, n \geq N\ \left[\ |a_m - a_n| < \epsilon\ \right]$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \sup \{a_k \,|\, k \geq n\}, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \inf \{a_k \,|\, k \geq n\}.$$

- 数列の諸性質

（乙）上に有界な単調増加数列は収束する．

（丙）有界な数列は収束する部分列をもつ（ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理）．

（丁）コーシー列は収束する（$\mathbb{R}$ の完備性）

- 連続性の公理の言い換え：(甲) $\iff$ （乙）$\iff$ （丙）&（ア）$\iff$ （丁）&（ア）

【級数】

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{ここで} \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

- コーシー条件：$\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \text{s.t.}\, \forall n > \forall m \geq N\ \left[\ |S_n - S_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \epsilon\ \right]$
- 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$（$c_n \geq 0$）の収束の判定：優級数で上から押さえる．

ダランベール：$r = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$，またはコーシー： $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$ が存在するとする

$\Longrightarrow$　$r < 1$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$（収束），$r > 1$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \infty$（$+\infty$ に発散）．

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとは，正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束するときにいう（このとき，コーシー条件より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する）．級数が収束するが絶対収束しないとき，条件収束するという．絶対収束する級数の和（極限値）は，足し合わせる順番によらない．

$\boxed{2}$ 連続関数

【関数の極限】

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall\epsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \left[\ |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\alpha| < \epsilon \ \right]$$

$\iff$ 点 a に収束する任意の数列 $\{x_n\}$ に対して，数列 $\{f(x_n)\}$ が α に収束する．

$\iff$（コーシー条件）$\forall\epsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \left[\ |x-a| < \delta, |x'-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(x')| < \epsilon \ \right]$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall\epsilon > 0 \ \ \exists K > 0 \text{ s.t. } \left[\ x > K \Longrightarrow |f(x)-\alpha| < \epsilon \ \right]$$

【連続関数】

- $f(x)$ が点 $x=a$ で連続 $\overset{\text{def}}{\iff} \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$ が連続関数 $\overset{\text{def}}{\iff}$ すべての点 $a \in I$ において $f(x)$ が連続

$$\forall a \in I \ \forall\epsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\epsilon, a) > 0 \text{ s.t. } \big[\, |x-a| < \delta \ (x \in I) \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon \, \big]$$

- 有界閉区間上の連続関数の性質

（１）<u>中間値の定理</u>：有界な閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が $f(a) < f(b)$ であるとする．このとき，$f(a) < \alpha < f(b)$ なる任意の実数 α に対して，$f(c) = \alpha$ となる $c \in [a,b]$ が存在する．

（２） <u>最大値・最小値の定理</u>：有界な閉区間上の連続関数は，最大値および最小値をもつ．

（３） 有界な閉区間 I 上の連続関数 $f(x)$ は一様連続，すなわち

$$\forall\epsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ s.t. } \forall a \in I \ \big[\, |x-a| < \delta \ (x \in I) \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon \, \big]$$

（δ が $a \in I$ の取り方と無関係に ϵ のみによって定まることに注意．$\exists\delta \ \forall a$ と $\forall a \ \exists\delta$ は意味が異なる．）

- 逆関数

区間 I 上の連続関数 $f: I \to \mathbb{R}$ について

f は単射 $\quad\iff\quad$ f は狭義単調（増加または減少）関数

さらにこのとき，$f: I \to J := f(I)$ は全単射であって，$f^{-1}: J \to I$ も連続.

$\boxed{3}$ 微分積分の基礎

【微分】 $f(x)$ が点 $x=a$ で微分可能 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在する

（この極限値を $f(x)$ の点 a における微分係数といい，$f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$ 等と記す）

- 高次の無限小：$\phi(x),\varphi(x)\to 0\ (x\to a)$ であるとする．$\lim_{x\to a}\rho(x)=0$ なる $\rho(x)$ があって $\phi(x)=\rho(x)\varphi(x)$ のように表されるとき，点 a において $\phi(x)$ は $\varphi(x)$ より高次の無限小であるいい，$\phi(x)=o(\varphi(x))$ と記す（ランダウ記号）

$$f(x)\text{ が点 }x=a\text{ で微分可能}\Longleftrightarrow f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(|x-a|)$$

1 次関数 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ で表される直線を $y=f(x)$ の点 $x=a$ における接線と呼ぶ（関数 $y=f(x)$ の点 a のまわりでの “1 次関数による最良近似”）

- $\begin{cases}(\alpha f+\beta g)'(a)=\alpha f'(a)+\beta g'(a), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\text{（線形性）}\\ (fg)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)\text{（ライプニッツ則）}\end{cases}$
- 合成関数の微分法：$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))g'(a)\quad\left(\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\right)$
- $f:I\to\mathbb{R}$ が I 上のすべての点で微分可能 $\Rightarrow$ 導関数 $f':I\to\mathbb{R}$

  高階微分係数・高階導関数 $f',f'',f''',\cdots,f^{(k)}:=\frac{d}{dx}\left(f^{(k-1)}\right)$, $k=1,2,\cdots$

$f(x)$ が C^n 級 $(n=0,1,\cdots,\infty)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ n 階までの導関数 $f^{(k)}$ $(k\le n)$ が存在して，それらが連続

- 平均値の定理：閉区間 $[a,b]$ 上連続で開区間 (a,b) 上微分可能な関数 $f(x)$ について，

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ なる点 c が a,b の間に存在する．（定理「有界閉区間上の連続関数は最大・最小値を持つ」を使って示される）

b を変数 x に置き換えれば，$\exists\, c$ s.t. $f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$ $\Rightarrow$ テイラー展開の剰余項評価

コーシーの平均値の定理：$\exists c\in(a,b)$ s.t. $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ $\Rightarrow$ ロピタルの定理

【定積分】 定積分＝リーマン和の極限： $\displaystyle S=\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$

ここで，Δ は閉区間 $[a,b]$ の分割 $x_0=a<x_1<\cdots<x_N=b$ を指し，$|\Delta|:=\max_{1\le k\le N}|x_k-x_{k-1}|$ とおく．さらに $x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$ なる点 ξ_k を取る．極限 $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}$ の意味は，任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して，$|\Delta|<\delta$ を満たす任意の分割 Δ と任意の $\{\xi_k\}$ に対して、$|$ リーマン和 $-S|<\epsilon$ となることである．この極限が存在するとき，関数 f はリーマン積分可能という．

特に，閉区間 $[a,b]$ 上の区分的連続関数（有限個の点を除いて連続）はリーマン積分可能（定理「有界閉区間上の連続関数は一様連続」を使って示される）

- 定積分の線形性，区間に関する加法性，絶対値評価 $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$

【微分積分学の基本定理】 $h(x)$ が有界閉区間 $[a,b]$ 上の C^1 級関数（導関数が連続）とするとき，

$$h(b)-h(a)=\int_a^b h'(x)\,dx$$

【テイラー展開】

- （テイラー多項式近似）C^∞ 級関数 $f(x)$ の点 $x=a$ における n 次テイラー多項式 $P_n(x)$ とは，点 a での n 階までの微分係数が $(P_n)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ となる n 次多項式を指す：

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

このとき，
$$f(x) = P_n(x) + o(|x-a|^n)$$

が成り立つ（点 a のまわりでの "n 次多項式関数による最良近似"）．実際，剰余項 $R_{n+1}(x) := f(x) - P_n(x)$ は次のような表示を持つので $(x-a)^n$ よりも高次の無限小である：

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

- （極大極小）$f'(a) = \cdots = f^{(2k-1)}(a) = 0$ かつ $f^{(2k)}(a) \neq 0 \Longrightarrow f(x)$ は $x=a$ で極値をとる
- （テイラー級数展開）$|x-a| < R$ において $\lim_{n\to\infty} |R_{n+1}(x)| = 0$ であるとき，この範囲において $f(x)$ は収束べき級数で表される

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad |x-a| < R$$

【広義積分】　広義積分＝ "定積分の極限"

$f(x)$ が $a < x < b$ の範囲で定義された連続関数とするとき，$a < c < b$ として

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{u_1\to a+0} \int_{u_1}^c f(x)\,dx + \lim_{u_2\to b-0} \int_c^{u_2} f(x)\,dx$$

この極限が存在するとき，広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束するといい，$f(x)$ を広義積分可能という．ここで，$a=-\infty$, $b=+\infty$ であってもよい．また，$a < x \leq b$ あるいは $a \leq x < b$ の範囲で連続の場合は，片方の端点に関する極限である．例えば $f(x)$ が $a < x \leq b$ で連続のとき，コーシー条件で言い換えれば，$f(x)$ が広義積分可能 $\Leftrightarrow \int_p^q f(x)dx \to 0$ $(a < p < q,\ q \to a)$

- （広義積分の収束判定）$f(x), g(x)$ が $a < x \leq b$ の範囲で連続かつ $|f(x)| \leq g(x)$ を満たすとする．このとき，$g(x)$ が広義積分可能ならば，$f(x)$ も広義積分可能.

【積分から関数を創る】

- （対数関数・指数関数の解析的定義）$\log x := \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ $(x>0)$．さらに $x = \log y$ の逆関数により指数関数 $y = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ を定義する．これは微分方程式 $y' = y$ で初期条件が $y(0)=1$ の唯一の解である．正数 $a>0$ に対して一般の指数は $a^b := e^{b\log a}$ で定義される.
- （ヤコビの楕円関数）$u(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$ の逆関数を $x = sn(u)$ とおき，$cn(u) := \sqrt{1-sn^2(u)}$，$dn(u) := \sqrt{1-k^2sn^2(u)}$ とおく．$k \to 0$ のとき，$sn(u) \to \sin u$，$cn(u) \to \cos u$,
- （ガンマ関数，ベータ関数）$\Gamma(s) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$，$B(p,q) := \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$.

$\cdots$ etc

$\boxed{4}$ 関数列の収束

【関数列の一様収束の定義】

- 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I 上で各点収束 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 各点 $x \in I$ で極限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在
- 関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で関数 $f(x)$ に <u>一様収束</u> する
  $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N,\ \forall x \in I\ \left[\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \right]$
  $\iff$ $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$
  $\iff$（コーシー条件）$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall m, \forall n \geq N,\ \forall x \in I\ \left[\ |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon\ \right]$
- $\{f_n(x)\}$ が I 上で <u>広義一様収束</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の有界閉区間 $K \subset I$ 上で $\{f_n(x)\}$ が一様収束

【一様収束と連続性・微分・積分】

- 連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で関数 $f(x)$ に一様収束するならば，$f(x)$ は I 上で連続である．
- 連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $I = [a, b]$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束するならば，その原始関数の列も一様収束して次を満たす：

$$\int_a^x f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt.$$

- C^1 級関数列 $\{f_n(x)\}$ について，その導関数 $\{f_n'(x)\}$ が $I = [a, b]$ 上で一様収束し，かつ数列 $f_n(a)$ が収束するならば，$\{f_n(x)\}$ も一様収束し，その極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は次を満たす：

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

【関数項級数】 $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$，すなわち $S_n(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ の極限

$f_n(x)$ は連続で $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が一様収束 $\Rightarrow$ 項別積分 $\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt$.
さらに $f_n(x)$ が C^1 級で $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$ が一様収束 $\Rightarrow$ 項別微分 $\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$.

【収束べき級数】 $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$

この極限が $|x| < R$ において絶対収束し，$|x| > R$ において発散するとき，R を**収束半径**という．

- （コーシー・アダマール） $R = \dfrac{1}{\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$
- （アーベル）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0 \neq 0$ で収束するとき，$|x| < |x_0|$ の範囲で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対かつ広義一様収束し，この範囲で連続，さらに端点 $x = x_0$ でも（片側）連続．
- 収束半径の内部で項別積分・項別微分が（何度でも）できる：

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots \quad (|x| < R)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \quad (|x| < R)$$