

# マッケイ対応とヒルベルト・スキーム

北海道大学 中村 郁

日本評論社 数学の楽しみ 28, 2001 年 12 月号所収

## 1 ディンキン図形と ADE

ディンキン図形と呼ばれる簡単な図形, とりわけ ADE というディンキン図形が数学や数理物理のいろいろな分野に登場する. ディンキン図形とは図 1 に示すような簡単な図形のことである. 簡単な図形であるにもかかわらず奥深い. そしてそれゆえに昔から数学者の関心をひいて止むことがない. 本誌『数学の楽しみ』23 号「ディンキン図形をめぐって」は, ディンキン図形に関する最近の話題を伝えて興味深い.

それにしても同じものが一見お互いに何の関係もないさまざまな分野に現われる, その理由は何だろうか? あるいはこう問うこともできる. それらの間にまだ見えてはいないが ADE を介したより深い, より直接的な結びつきがあるのではないだろうか? 本稿ではこうした問題を考えてみたい.

ADE とは単純リイ環という非可換な結合代数の系列につけられた名前である. よく知られているように Elie Cartan の命名した系列は A, B, C, D, E, F, G であるが, それらはみなディンキン図形を用いて構成される. のちのちさまざまな分野に登場するのは その中の ADE である. ディンキン図形 ADE に関連して現れる対象を, 同じ系統ごとに整理して述べれば以下のようになる:

(0) ディンキン図形 ADE

(1)  $SL(2, \mathbb{C})$  の有限部分群,  $\mathbb{R}^3$  中の正多面体とその回転群

(2) 2 次元超曲面の単純特異点, 変形で安定な臨界点

(3) 単純古典リイ環 ADE,  $\Pi_1$  型因子環の特別な対, 量子群などの “単純な” 結合代数の系列

(4)  $SL(2, \mathbb{Z})$ -不変なある種の共形場理論の分配関数

(5) 3 つの有限単純群フィッシャー群  $F_{24}$ , ベビーモンスター  $\mathbb{B}$ , モンスター  $\mathbb{M}$  の位数 2 の元に関する事実 (但し順に  $E_6, E_7, E_8$  が対応)

たとえば (2) の単純特異点は非常に多くの特徴付けを持つ. [Durfee79] の報告によれば少なくとも 15 種類の特徴付けがある. したがってその中のどれに

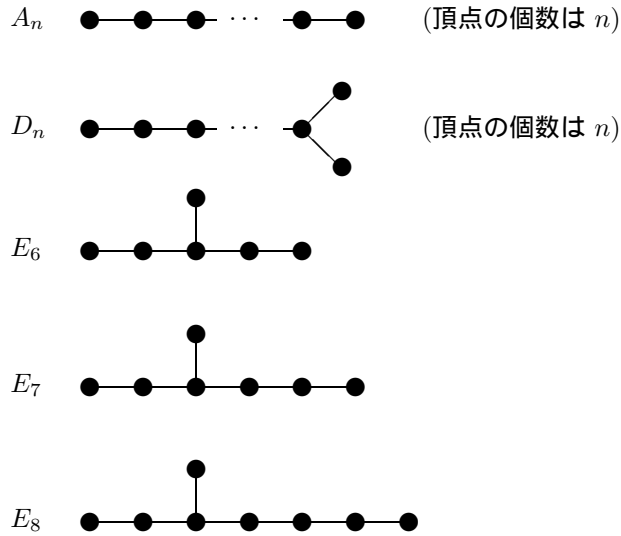


図 1: デインキン図形 ADE

よってこの問題の特異点の系列を定義すべきかも問題にはなる。それと同じことは (3) についても言えるが、(3) の場合はどの場合にも、その情報の本質的部分を回復するのに十分な図形（通常、樹木と呼ばれる）で表される正定値 2 次形式に行き着いて、そのあとはよく知られた分類により (0) の ADE に限られる。したがって対象はさまざまでも ADE に限る原理はほぼ同一と見てよいだろう。それと同様に、(2) の特異点ないし多項式は問題の設定は多少違うが、どれも厳しい条件を満たす多項式の標準形を扱うので、分類結果が同じになるのはそれ程不思議ではない。

(4), (5) についてはもうスペースがないので説明を省略するが、今後この二つについては無限次元代数の無限次元表現に関する マッケイ対応の問題として論じられる可能性のあることを指摘しておきたい。

というわけで、やはり (1)-(5) の番号の異なるもの間の直接対応を見つけるのが難しいのだが、それだけ面白い問題でもある。本稿では (1) から (2) へ移る「マッケイ対応」とよばれるあまり自明でない対応を取り上げる。

問題の空間は等質空間でないにも関わらず、「マッケイ対応」は不変式論の幾何学を表現論の幾何学に結びつけて、不変式論の幾何学をいっそう深く理解する視点をあたえる。それはしばしば強力な指導原理ですらある。

「マッケイ対応」それ自身はこの号のテーマである「モジュライ」とは関係ない。ところが「マッケイ対応」の説明を考える過程で「モジュライ」を

用いるのである。われわれのアプローチでは、「マッケイ対応」とは群の表現をもとに、あるモジュライ空間の部分空間を構成する原理にほかならない。

ここでは論文「伊藤-中村 1999」に基づいて、群軌道のヒルベルト・スキームを  $D_5$  の場合に解説してみたい。  $D_5$  は自明でないほぼ最初の場合である。それは有限群の表現に関するわずかな直接計算だけで、すべてを具体的に見ることのできるモジュライ理論の例を与えてくれる。それだけでなく、のちに見るように群軌道のヒルベルト・スキームは「マッケイ対応」の予見する幾何学をすべて自然に実現する。

## 2 マッケイ対応

### 2.1 不変式環

以後は (3)(4)(5) は忘れて古典的な (1)(2) に戻って話をしたい。  $SL(2, \mathbb{C})$  の有限部分群は  $SL(2, \mathbb{C})$  の中で共役を除いて完全に分類されており、たとえば (0) で  $D_5$  が対応する場合には、  $\Gamma$  は

$$\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{及び} \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される位数 12 の群である。但し  $\varepsilon = e^{2\pi\sqrt{-1}/6}$  とする。

このときディンキン図形  $D_5$  を  $\Gamma$  から構成する方法は 2 通り知られている。

まず最もありふれた（誰でも思いつく）方法は  $\mathbb{C}^2$  の商空間  $Y = \mathbb{C}^2/\Gamma$  を調べることである。  $\mathbb{C}^2$  の座標環を  $\mathbb{C}[x, y]$  とし、  $\Gamma$ -不変な  $\mathbb{C}[x, y]$  の元のなす部分環  $\mathbb{C}[x, y]^{\Gamma\text{-inv}}$  とする。ただし簡単のため通常と違って始めから  $\mathbb{C}[x, y]$  への作用として  $g \in \Gamma$  を表わし、空間への作用は  $T_g$  と書くことにする。具体的にはつぎのように横ベクトルに行列  $g$  を右から作用させる：

$$T_g : (x, y) \mapsto (g(x), g(y)) = (x, y) \cdot g \quad (g \in \Gamma).$$

通常は空間への作用を書くのだが、ここではあとで  $\mathbb{C}[x, y]$  への表現を調べる必要が生ずるので、こうした方が便利なのである。たとえば、  $\tau(x) = -y$ ,  $\tau(y) = x$  である。

このとき  $Y$  は  $\mathbb{C}[x, y]^{\Gamma\text{-inv}}$  によって記述されるが、  $\Gamma$  は原点  $(0, 0)$  を唯一の固定点として持ち、したがって  $Y$  は原点  $(0, 0)$  の像  $O$  でのみ特異点を持つ。  $\mathbb{C}[x, y]^{\Gamma\text{-inv}}$  は Klein によってつぎの 3 つの元によって生成されることが知られている：

$$F = x^6 + y^6, \quad G = x^2y^2, \quad H = xy(x^6 - y^6).$$

容易にわかるように, 関係式

$$4G^4 + H^2 - GF^2 = 0$$

が成立つ. したがって  $Y$  の  $O$  の近くでの様子は  $C^3$  の超曲面

$$4v^4 + w^2 - vu^2 = 0$$

の原点  $(0, 0, 0)$  の近くでの様子と一致する. これが (1) から (2) へ移るよく知られたプロセスであるが, ディンキン図形  $D_5$  はこの超曲面の特異点  $(0, 0, 0)$  を解消することによって得られる.

この超曲面の  $O$  の近傍を再び  $Y$  と表わしておくとして  $Y \setminus \{O\}$  と 5 個の射影直線  $P^1$  との適当な合併をとれば, 特異点のない 2 次元複素多様体  $X$  を構成できる. この  $X$  は  $Y$  の式の形を見て丹念に計算すれば分かるものであるが, 大切なことは, このようにして構成される最小特異点解消と呼ばれるものは, その計算の過程によらず  $Y$  によって唯ひと通りに定まることである. したがって特に 5 個の射影直線の配置のしかたも唯ひと通りに定まる. これを例外集合という. 計算の結果を図示すれば図 2 のようになる.

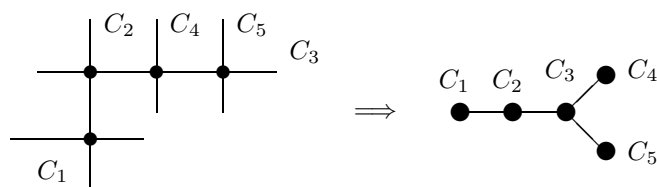


図 2:  $D_5$  の例外集合

図 2 の左側の図の線分はそれぞれ 1 個の射影直線を表わし, 2 つの線分の交わりは対応する射影直線が 1 点で交差していることを示している. この図形はそのままではディンキン図形  $D_5$  になっていないが, この図形の双対図形を考える. つまり, 各線分 (つまり射影直線) を 1 つの頂点 (右図の黒丸) で表わし, 線分の交わり (つまり射影直線の交点) を 2 つの頂点を結ぶ線分で表わすことにすると, 右側の図のようなディンキン図形  $D_5$  が出てくる.

## 2.2 $\Gamma(D_5)$ の表現論

次に  $\Gamma$  から同じディンキン図形を得るための第 2 の方法を説明したい. 第 1 の方法を幾何学的方法とすれば, 第 2 の方法は純表現論的方法と言う

べきもので, McKay による.

まず  $\Gamma$  の既約表現を分類することから始める. ( $n$  次元) 表現とは, 群の準同型規則を守るように  $\Gamma$  の各元に ( $n \times n$ ) の正方行列を対応させる写像のことである. また既約表現とはより小さい表現に分解できないもののことである. たとえば  $D_5$  の場合

$$\sigma \mapsto \sigma, \quad \tau \mapsto \tau$$

という自分自身を対応させる写像は  $\Gamma$  の 2 次元既約表現を与える. これは  $\rho_{\text{nat}}$  と  $\rho_2$  と表わす. すなわち,  $\rho_{\text{nat}}(\sigma) = \sigma, \rho_{\text{nat}}(\tau) = \tau$  である.  $\Gamma$  の全ての元に 1 を対応させるのも準同型なので, 1 つの 1 次元表現になる. これは  $\rho_0$  で表わし単位表現と呼ぶ.  $\Gamma$  が  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  のどんな有限部分群であっても, いつも  $\rho_{\text{nat}}$  と  $\rho_0$  は定まることに注意したい. このふたつの表現は以下の議論でも特別な役割を果たす.

次にたとえば多項式  $P_1(x, y) = xy$  をとる.  $P_1$  は  $\sigma$  と  $\tau$  の作用によって

$$\sigma P_1 = P_1, \quad \tau P_1 = -P_1$$

のように変化する. 正確に計算したいひとのために注意しておく,  $\sigma(x) = \varepsilon x, \sigma(y) = \varepsilon^{-1}y, \tau(x) = -y, \tau(y) = x$  である. さらに  $\sigma P_1(x, y) := P_1(\sigma(x), \sigma(y)) = P_1(-y, x)$  と計算する. そこでこの  $P_1$  の変化の様子を考慮して

$$\rho_1(\sigma) = 1, \quad \rho_1(\tau) = -1$$

のように定義すると, 容易に分かるように  $\rho_1$  も  $\Gamma$  の 1 次元表現を与える. 以下

$$P_4(x, y) = x^3 + iy^3, \quad P_5(x, y) = x^3 - iy^3$$

とすると  $P_4, P_5$  も 1 次元表現  $\rho_4, \rho_5$  を定める. ただし  $i = \sqrt{-1}$  とする. 簡単な計算で,

$$\begin{aligned} \sigma P_4 &= -P_4, & \tau P_4 &= iP_4 \\ \sigma P_5 &= -P_5, & \tau P_5 &= -iP_5 \end{aligned}$$

が分かる. この他  $\Gamma$  にはもう 1 つ 2 次元既約表現 (の同値類)  $\rho_3$  があるが, それはテンソルの記号を用いて,  $\rho_3 = \rho_2 \otimes \rho_4$  と定義すればよい. 具体的には

$$\rho_3(\sigma) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho_3(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

である.

McKay の発見を説明するには表現の分解を説明しなければ本来は不十分なのだが, ここでは話を出来るだけ簡単にするために表現の指標を調べる. 各

表現  $\rho_k$  に対して  $\chi_k = \text{tr}(\rho_k)$  ( $\text{tr}$  は行列の対角成分の和) と定義する. この  $\chi_k$  を指標という.

もし  $\rho_k$  が 1 次元表現ならばもちろん  $\chi_k = \rho_k$  である.  $\Gamma$  の 2 つの互いに共役な元  $a, b$  に対しては (つまり,  $a = gbg^{-1}$  となるような  $\Gamma$  の元  $g$  があるときは)  $\chi_k(a) = \chi_k(b)$  が成立する. すなわち指標は  $\Gamma$  の共役類の関数である. ところで  $\Gamma$  の共役類は以下の 6 個である, ただし  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする:

$$\{e\}, \{-e\}, \{\sigma, \sigma^5\}, \{\sigma^2, \sigma^4\}, \\ \{\tau, \sigma\tau^3, \sigma^2\tau\}, \{\tau^3, \sigma\tau, \sigma^2\tau^3\}.$$

各指標は共役類の関数として表 1 の値をとる. 好都合なことに指標が違えば既約表現の同値類も異なる. さらに, 表 1 で  $e$  の下に並んだ数字 1, 1, 2, 2, 1, 1 について 2 乗して和をとると

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 12 = \Gamma \text{ の元の個数}$$

が成り立つ. さいわい「この等式が成り立つと既約表現の同値類はもうそれ以外には存在しない」という定理がある. そこで既約表現の同値類はすべてわかったことになる.

表現	指標	$e$	$-e$	$\sigma$	$\sigma^2$	$\tau$	$\tau^3$
$\rho_0$	$\chi_0$	1	1	1	1	1	1
$\rho_1$	$\chi_1$	1	1	1	1	-1	-1
$\rho_2$	$\chi_2$	2	-2	1	-1	0	0
$\rho_3$	$\chi_3$	2	2	-1	-1	0	0
$\rho_4$	$\chi_4$	1	-1	-1	1	$i$	$-i$
$\rho_5$	$\chi_5$	1	-1	-1	1	$-i$	$i$

表 1:  $\Gamma$  の指標

### 2.3 McKay の発見

「楕円モジュラー関数  $j(q) = (1/q) + 744 + 196884q + \dots$ ,  $196884 = 196883 + 1$  であり 196883 はモンスターの忠実な既約表現の最小次数に等しいという) ムーンシャインに関する発見は 1978 年 11 月の最初の週だった. そ

のころ Fischer 一家がモントリオールの私を訪ねてきたので、当時 Fischer とともにプリンストンに滞在中の Thompson へてに (それについて書いた) 手紙を託した。私はまだモンスターの指標表を見てはいなかった。… (中略) … マッケイ対応の発見は 78 年末だったと思う。」(括弧内は筆者による補足)

筆者の問い合わせに答えて McKay はこう書いてきた。ふたつの重要な発見はほぼ時を同じくしてなされたようである。(もうひとつの重要な § 1 の (5) の発見は「たぶん 1979 年 2 月だ」とも書いてきた。これももちろん McKay の発見である。) 1978 年当時はまだモンスターの存在は予想されていただけで、最初の発見のあと McKay は Fischer らの計算したモンスターの指標表を見ることになる。しかしその指標表というもの、モンスターが 196883 次の既約表現を持つと仮定して計算されたものだった。モンスターが Griess によって構成されるのは 1979 年から 1980 年にかけてである。最初の McKay の発見はやがてモンスターのムーンシャインや Borcherds の理論へと発展していく。[B98] にはこのあたりの事情が少し触れられている。このほか [G80] にモンスター発見にいたる経緯がかなり詳しく述べられている。

これから説明する「マッケイ対応」についても、現在までに世界の数学者による数多くの研究がある。そして「マッケイ対応」と (5) は、いまなお世界の少なくない数学者によって研究されている「熱いテーマ」でもある。

話をもとに戻して、表 1 の最初の列の 6 つの元  $e, -e, \dots, \tau^3$  から成る集合を  $S$  とする。すでに見たように  $S$  は  $\Gamma$  の各共役類を代表する。指標  $\chi_k$  は共役類の関数なので、簡単のため  $\chi_k$  を  $S$  上の関数とみなしておこう。そこで関数  $\chi_k$  と  $\chi_2$  の積を  $S$  上の関数として  $\chi_0, \dots, \chi_5$  までの和として表わすことを考える。(これは一般論によっていつも可能であることが分かっている。) たとえば

$$\chi_2^2 \text{ は } S \text{ 上 表の左から順に } 4, 4, 1, 1, 0, 0$$

という値をとる。これは  $\chi_0 + \chi_1 + \chi_3$  がとる値に等しい。したがって

$$\chi_2^2 = \chi_0 + \chi_1 + \chi_3$$

が成り立つ。同様に

$$\chi_0\chi_2 = \chi_1\chi_2 = \chi_2, \quad \chi_3\chi_2 = \chi_2 + \chi_4 + \chi_5$$

$$\chi_4\chi_2 = \chi_3, \quad \chi_5\chi_2 = \chi_3$$

が確かめられる。これらの関係式から表現  $\rho_i$  のテンソル積に関する関係が導かれる：

$$\rho_2 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_0 + \rho_1 + \rho_3, \quad \rho_0 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_1 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_2,$$

$$\rho_3 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_2 + \rho_4 + \rho_5, \quad \rho_4 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_3,$$

$$\rho_5 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_3.$$

著しい特徴は右辺の  $\chi_i$  (あるいは  $\rho_i$ ) の係数が 0 又は 1 に等しいことである。そこで次のようにして図形を作る：

各  $\chi_i$  に対して 1 つの頂点 ( 図 3 の黒丸 ) を対応させ、 $\chi_2\chi_i$  の右辺に  $\chi_j$  が現れたら頂点  $i$  と頂点  $j$  を線分で結ぶことにする。

上の計算結果から分かるように、 $a_{ij} = a_{ji}$  なのでひとつの図形 ( 樹木 tree ) を矛盾なく作ることができる。図 3 の左側の図がその図形である。

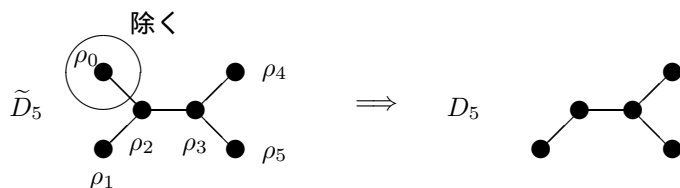


図 3: 表現のディンキン図形

この左の図形も専門家にはなじみ深いもので、 $\tilde{D}_5$  と表わし  $D_5$  ティルダと読む。ここで頂点  $\rho_0$  を除くと、最初の方法で出てきたのと同じディンキン図形  $D_5$  が得られる。図形の定める 2 次形式を正定値にするためには  $\rho_0$  は除かなければならないので、この操作にはじゅうぶん理由があるのだが、この操作が不自然に見える読者のためにこう付け加えておこう。(1) の有限群にはほかにいろいろな群がある。そのどれに対しても今と同じように 2 種類の図形を作ると、それが一致するのである。いつもそうなるとすれば、二つの計算方法の違いを考えるとこれはやはり驚嘆に値する発見である。このふたつのディンキン図形の全単射 1 対 1 対応を「マッケイ対応」という。

なぜ全然違う方法で同じ図形が出てくるのだろうか？ 現在までに「マッケイ対応」の説明は、表現論的には Springer、代数幾何的には Gonzalez-Sprinberg と Verdier によるものなどいくつか知られている。Springer は「(0) と (1) の間のマッケイ対応」の、 $SL(2, \mathbb{C})$  の有限部分群の分類に依存しない一般的な証明を与えた。一方 GSV は、1 つの既約表現の同値類に対し、ベクトル束の特性類を通じて  $Y$  の最小特異点解消  $X$  の例外集合の既約成分が 1 つ対応することを示し、その対応によってディンキン図形が一致することを示した。

この解説の残る部分で、それらとは異なる観点から McKay の発見に説明を与えてみたい。[伊藤-中村 1999] による新しい説明である。これによると、「例外集合の非特異点のおのおのに既約表現が対応し、1 つの既約成分に沿うては既約表現の同値類が変化しない……」というもう少し精密な説明になる。既約表現もその同値類も同じようなものだが、既約表現の同値類は有限個であるのに対し既約表現は無数にある。そしてその差は無視できない。



なぜ  $\rho_{\text{nat}}$  によるテンソル積をとるのか？なぜ頂点  $\rho_0$  は除くのか？この問題も同じ文脈で考えてみたい。

### 3 $n$ 点のヒルベルト・スキーム

#### 3.1 射影空間

$n$  点のヒルベルト・スキームを説明するために、まず練習として射影空間を説明する。  $V = \mathbb{C}^3$  としてその座標を  $(x_0, x_1, x_2)$  とする。  $V$  はここでは  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間とみなして、次の問題「 $V$  の中の 1 次元部分ベクトル空間はどれほどあるか？」を考える。  $W$  を  $V$  の 1 次元部分ベクトル空間（以下 1 次元部分空間という）とすれば、ある元  $w = (a_0, a_1, a_2)$  で生成される。ここで  $(a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$  である。2 つの  $w, w' \in V$  が同じ  $w$  を生成するには  $w = \lambda w'$  となる  $\lambda \in \mathbb{C}$  ( $\lambda \neq 0$ ) が存在することが必要十分である。したがって

$$V^{(1)} := V \text{ の 1 次元部分空間全体} = \mathbb{P}^2 \text{ ( 2 次元射影空間)}$$

が成立する。これが問題の答である（と同時に  $\mathbb{P}^2$  の定義でもある）。

次に問題「 $V$  の 2 次元部分空間はどれ程あるか？」を考える。 §4 の議論のためには、 $V$  の余次元 1 の部分空間を考える方が自然になるのでそうすることにする。問題の答は

$$\begin{aligned} V^{(2)} &:= V \text{ の 2 次元部分空間全体} \\ &= V \text{ の余次元 1 の部分空間全体} \\ &= V^* (V \text{ の双対}) \text{ の 1 次元部分空間全体.} \end{aligned}$$

$V^*$  も 3 次元ベクトル空間なので、この右辺の集合も  $\mathbb{P}^2$  と同一視できる。ここで §4 での計算のもとになる例を計算してみよう。  $V^{(2)}$  の次の部分集合  $Z_1, Z_2$  を考える。

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{W \in V^{(2)}; W \ni (1, 0, 0)\} \\ Z_2 &= \{W \in V^{(2)}; W \ni (0, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

$W \in Z_1$  とすると、 $W$  の基底として  $(1, 0, 0)$  と  $v_W = (0, a_1, a_2)$  という形の元をとることができる。  $v_W$  は定数倍を除いて唯ひとつ通り定まることが分かる。したがって集合としてはつぎのように同一視できる：

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{v_W; W \in Z_1\} / \text{定数倍は同一視} \\ &= \{(0, a_1, a_2)\} / \text{定数倍} = \mathbb{P}^1 \text{ ( 1 次元射影空間)}. \end{aligned}$$

同様に  $Z_2 = \{(a_0, 0, a_2)\} / \text{定数倍} = \mathbf{P}^1$  となる. さらに  $Z_1$  と  $Z_2$  の共通部分は,  $(1, 0, 0)$  と  $(0, 1, 0)$  というベクトルで生成される 2次元部分空間  $W_0$  から成ることも分かる.  $V^{(2)}$  の元は 2次元部分空間であるが, これを 1点とみなして  $V^{(2)}$  という集合を考えたので

$$Z_1 \cap Z_2 = 1 \text{ 点}$$

となる. 「モジュライ」という言葉を用いて表現すれば,  $V^{(2)}$  は  $V$  の中の 2次元部分空間のモジュライ空間であり  $Z_1, Z_2$  は  $V^{(2)}$  の部分集合であるが

$$Z_1 = \mathbf{P}^1, Z_2 = \mathbf{P}^1 \quad \text{かつ} \quad Z_1 \cap Z_2 = 1 \text{ 点}$$

が成り立つ, ということになる. 後に §4 で群の軌道のヒルベルト・スキームの例外集合を計算するが, 上と本質的に同じ計算をする. 簡単のために  $V$  を 3次元としたが, もし 4次元として更にその 2次元部分空間のモジュライ空間を考えれば, それはもはや射影空間ではなくグラスマン多様体  $\text{Gr}(4,2)$  と呼ばれるものになる.

### 3.2 空間 $X$ が $\mathbf{C}$ の場合

いよいよ  $n$  点のヒルベルト・スキームに入りたいのだが, まず  $X = \mathbf{C}$  の場合に考える. 空間  $X$  の「 $n$  点」とは「順序を無視した  $n$  個の点」のことであるとする. 重複も許すことにする. したがって  $n$  点  $Z$  とは形式和

$$Z = n_1 P_1 + n_2 P_2 + \cdots + n_r P_r \quad (n = n_1 + \cdots + n_r, P_i \neq P_j)$$

のことである. 今  $X = \mathbf{C}$  の座標  $x$  を用いて

$$P_i : x = \alpha_i$$

と表わせば, 上の  $n$  点  $Z$  は

$$f_Z(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r}$$

の零点集合と考えてよい. ここで 1 変数多項式環  $\mathbf{C}[x]$  のイデアル  $I_Z$  を

$$I_Z = \{g f_Z ; g \in \mathbf{C}[x]\}$$

と定めれば, つぎは同値である:

$$Z \text{ が } n \text{ 点} \iff \text{イデアル } I_Z \text{ が } \mathbf{C}[x] \text{ の中で余次元 } n.$$

たとえば  $Z$  を原点の  $n$  倍とすれば  $f_Z = x^n$  であるが, このとき

$$\dim \mathbf{C}[x]/x^n \mathbf{C}[x] = n$$

となる. 上の同値条件を用いれば,  $\mathbf{C}$  上の  $n$  点のモジュライ空間 (つまり  $n$  点全体の集合) は最高次の係数が 1 に等しい  $n$  次多項式全体と一致する. したがってそれは  $(n-1)$  次以下の  $n$  個の係数の空間  $\mathbf{C}^n$  と同型である.

### 3.3 空間 $X$ が $\mathbb{C}^2$ の場合

3.2 と同じ考え方で一般の空間にも「 $n$  点」が定義できる. 空間  $X$  の次元が 2 以上になると「 $n$  点」という概念は 3.2 の考え方に従うと 2 通り出てくることになる. 簡単のため  $X = \mathbb{C}^2$  とする. まず第 1 に,

$$Z = n_1 P_1 + \cdots + n_r P_r, \quad n = n_1 + \cdots + n_r, \quad P_i \neq P_j$$

という形の順序を無視した形式和, つまり

$$Z \in \underbrace{X \times \cdots \times X}_n / (\text{順序を無視})$$

である. 後の空間を  $X^{(n)}$  で表わす. 正確には  $n$  次対称群  $S_n$  による商空間として

$$X^{(n)} = \underbrace{X \times \cdots \times X}_n / S_n$$

となる. この  $X^{(n)}$  は特異点をたくさん持つ.

つぎに記号上紛らわしいが  $X^{[n]}$  という空間を定義する.  $X^{[n]}$  が表題の  $n$  点のヒルベルト・スキームであるが, 3.2 の第 2 の考え方にしたがってつぎのように定義する:

$$\begin{aligned} X^{[n]} &= \left\{ \begin{array}{l} I \subset \mathbb{C}[x, y]; \quad I \text{ は } \mathbb{C}[x, y] \text{ のイデアルで} \\ \mathbb{C}[x, y] \text{ での余次元が } n \text{ に等しい} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} I \subset \mathbb{C}[x, y]; \quad I \text{ は } \mathbb{C}[x, y] \text{ の部分ベクトル空間で} \\ xI \subset I, yI \subset I, \dim \mathbb{C}[x, y]/I = n \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$X^{[n]} \ni I$  に対しては  $X$  上の部分集合  $Z$  が  $I$  の零点集合として自然に定まる. 一般にはこの  $Z$  の構造は複雑だが,  $n$  個の点とみなしうるような部分集合がともかく定まる.

つぎの事実が §4 の議論の出発点である. 少しあいまいな表現ではあるが,

**定理 3.4** (Fogarty)  $X = \mathbb{C}^2$  とする. このとき正則写像  $\pi: X^{[n]} \rightarrow X^{(n)}$  が定義され, この写像によって  $X^{[n]}$  は  $X^{(n)}$  の特異点解消となる. 写像  $\pi$  は点  $P_1, \dots, P_r$  を  $Z$  の台としたとき,

$$\pi: Z \mapsto n_1 P_1 + \cdots + n_r P_r$$

として定義される. 但し  $n_i = Z$  の  $P_i$  での重複度 (この定義は省略).

## 4 群の軌道のヒルベルト・スキーム

### 4.1 $\Gamma$ の固定点集合

$\Gamma$  を  $SL(2, \mathbb{C})$  の有限部分群とし、定理 3.4 で  $n = \Gamma$  の位数 の場合を考える。  $\Gamma$  は  $\mathbb{C}^2$  に作用するので  $X = \mathbb{C}^2$  のとき  $X^{[n]}$  にも  $X^{(n)}$  にも作用する。  $\pi$  により  $\Gamma$  の固定点はまた  $\Gamma$  の固定点に写像される。  $\Gamma$  の固定点集合をそれぞれ  $(X^{[n]})^\Gamma, (X^{(n)})^\Gamma$  で表わすことにすると

$$\pi^\Gamma : (X^{[n]})^\Gamma \rightarrow (X^{(n)})^\Gamma$$

という写像ができる。 定理 3.4 によって  $(X^{[n]})^\Gamma$  も特異点がない。

定理 4.2 [伊藤-中村 1999]  $n = \Gamma$  の位数 = 12 とする。 このとき

- (1)  $(X^{(n)})^\Gamma = \mathbb{C}^2/\Gamma$ ,
- (2)  $(X^{[n]})^\Gamma$  (の主要な連結成分) は  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  の最小特異点解消となる。

§1 で注意した通り、曲面の最小特異点解消は唯一とつ定まる。 ここで  $\Gamma$  を §2 で考察した 2 面体群とすると、例外集合は §1 で計算した (ことにした) ものと一致する。 実際、定理 4.2 は  $\Gamma$  の具体的記述を必要とせずに証明される。 しかし以下詳細に調べれば分かるように、単に例外集合がディンキン図形  $D_5$  と一致するだけでなくもう少しおもしろい現象が起きている。  $(X^{[n]})^\Gamma$  (の主要な連結成分) がこの節の表題の「群  $\Gamma$  の軌道のヒルベルト・スキーム」である。 これを  $\text{Hilb}^\Gamma(X)$  と表わす。

定理 4.2 によれば  $\pi^\Gamma$  は  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  の原点の上以外では同型である。 したがって例外集合は原点上に集中している。 言い換えれば

$$E = \{I \in \text{Hilb}^\Gamma(X); I \subset \mathfrak{m}\}$$

が  $\pi^\Gamma$  の例外集合を与える。 ただし  $\mathfrak{m} = x\mathbb{C}[x, y] + y\mathbb{C}[x, y]$  とする。

### 4.3 余不変式環

まず、 $\mathfrak{n}$  を不変式  $F, G, H$  で生成される  $\mathbb{C}[x, y]$  のイデアルとする。 このとき  $\mathfrak{n}$  は  $\Gamma$  の作用で不変なイデアルなので商環  $\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n}$  (これを  $\Gamma$  の余不変式環と呼ぶ) にも  $\Gamma$  が作用する。 もちろん  $\Gamma$  の作用は多項式の次数を変えないから  $\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n}$  を同次式ごとに分けておくと、その各同次式の部分に  $\Gamma$  が作用する。  $V_m$  を次数  $m$  の同次式で生成される部分空間とすると、

$$\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n} = \bigoplus_{m=0}^7 V_m$$

となる.  $V_0 = \mathbb{C}$  である.  $V_m$  及びその表現の同値類は表 2 の通りである.

以下  $\Gamma$  の作用で不変な部分ベクトル空間のことを, 簡単のために  $\Gamma$  加群と呼ぶことにする. たとえば  $V_2$  は 2 つの  $\Gamma$  加群  $\{xy\}$  及び  $\{x^2, y^2\}$  の直和である. 各々の直和成分は  $\rho_1$  及び  $\rho_3$  に同値な既約表現なのでこれを  $V_2(\rho_1)$ ,  $V_2(\rho_3)$  によって表わすことにする. その他も同様である. なお表 2 の中で  $\{f\}$ ,  $\{f, g\}$  とあるのは, それぞれ  $f$ , または  $f$  および  $g$  で生成されるベクトル空間を表わす.

$m$	$V_m(\rho)$	表現の同値類
1	$\{x, y\}$	$\rho_2$
2	$\{xy\} \oplus \{x^2, y^2\}$	$\rho_1 + \rho_3$
3	$\{x^2y, -xy^2\} \oplus \{x^3 + iy^3\} \oplus \{x^3 - iy^3\}$	$\rho_2 + \rho_4 + \rho_5$
4	$\{y^4, x^4\} \oplus \{x^3y, -xy^3\}$	$\rho_3 + \rho_3$
5	$\{y^5, -x^5\} \oplus \{xy(x^3 - iy^3)\} \oplus \{xy(x^3 + iy^3)\}$	$\rho_2 + \rho_4 + \rho_5$
6	$\{x^6 - y^6\} \oplus \{x^5y, -xy^5\}$	$\rho_1 + \rho_3$
7	$\{xy^6, x^6y\}$	$\rho_2$

表 2: 余不変式環の分解

#### 4.4 例外集合 $E$ の既約成分 $E_i$

表 2 は表現の同値類で見ると, 次数 4 を中心に対称に分布している. これは余不変式環のもつ双対性であるが, この双対性を用いて  $E$  の既約成分に相当する射影直線  $\mathbb{P}^1$  を構成することができる.

まず  $V_2(\rho_1) \oplus V_6(\rho_1)$  を見てみよう.  $V_2(\rho_1) = \{xy\}$ ,  $V_6(\rho_1) = \{x^6 - y^6\}$  である. そこで

$$I_1(s) = \{xy + s(x^6 - y^6)\} + \mathfrak{n}$$

と定義する.  $I_1(s)$  は  $xy + s(x^6 - y^6)$  及び  $F, G, H$  で生成される  $\mathbb{C}[x, y]$  のイデアルだという意味である. このとき, どんな  $s \in \mathbb{C}$  に対しても

$$\dim \mathbb{C}[x, y]/I_1(s) = 12$$

が成り立つ. たとえば  $s = 0$  とすると, 表から  $\dim \mathbb{C}[x, y]/I_1(s) = 12$  が分かる.  $s \neq 0$  だと面倒ではあるが同じことが示される.

問題は  $s \rightarrow \infty$  の極限を求めることである.  $E \ni I$  ならば  $\mathbb{C}[x, y]/I$  も  $\Gamma$  加群となるが  $\Gamma$  加群としては  $\Gamma$  の正則表現になる. この結果,  $I \supset \mathfrak{n}$  となるので  $\dim \mathbb{C}[x, y]/I = 12$ ,  $\dim \mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{m} = 23$  を考慮すれば,  $E$  は  $\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n}$  の余次元 11 の部分空間のグラスマン多様体  $\text{Gr}(\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n}, 11)$  の部分集合であることが分かる. グラスマン多様体はコンパクトなので無限点列  $I_1(s)$  ( $s \in \mathbb{C}$ ) は収束する. そこで  $I_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} I_1(s)$  と定義する. 正確には

$$I_1(\infty)/\mathfrak{n} = \lim_{s \rightarrow \infty} I_1(s)/\mathfrak{n}$$

となるような  $\mathfrak{n}$  を含む  $\mathbb{C}[x, y]$  のイデアルとして  $I_1(\infty)$  を定義する.

以後  $I \in E$  に対して,  $I/(mI + \mathfrak{n})$  を  $V(I)$  と表す. これはイデアル  $I$  の不変式以外の生成元を表している.  $E$  の部分集合を

$$E_1 = \{I \in E; \Gamma\text{-加群 } V(I) \text{ が表現 } \rho_1 \text{ を含む}\}$$

と定義すれば,

$$E_1 = \{I_1(s); s \in \mathbb{C}\} \cup I_1(\infty)$$

となり,  $E_1$  は射影直線  $\mathbb{P}^1$  と同型である. 同様に

$$E_2 = \{I \in E; \Gamma\text{-加群 } V(I) \text{ が表現 } \rho_2 \text{ を含む}\}$$

と定義すれば,  $E_2$  も射影直線  $\mathbb{P}^1$  と同型となる. たとえば  $t \neq 0$  に対して

$$I_2(t) = (x^2y - ty^5, xy^2 + tx^5) + \mathfrak{n}$$

と定めれば,  $I_2(t) \in E_2$  である.  $I_2(0), I_2(\infty)$  は上と同様に定義する. ここで

$$\{x^2y, xy^2\} = V_3(\rho_2), \{y^5, -x^5\} = V_5(\rho_2)$$

であることを注意すれば, 読者はもうどのような原理で  $E$  の既約成分がいつぎに定まるか推測がついたことと思う. つぎの  $E_3$  には  $V_4(\rho_3)$  を, 更につぎの  $E_4$  には  $V_5(\rho_4), V_3(\rho_4)$ ,  $E_5$  には  $V_5(\rho_5)$  と  $V_3(\rho_5)$  を用いればよく,  $E_3, E_4, E_5$  がすべて射影直線となることも同様に証明できる.

#### 4.5 $E_1$ と $E_2$ の交差とその理由

それでは,  $E_1$  と  $E_j$  の交点 (交わり) はどうなるかを調べてみよう.

$I_1(s) \in E_1$  ( $s \in \mathbb{C}$ ) は  $V(I_1(s)) \simeq \rho_1$  となるので, 他の成分  $E_j$  ( $j \neq 1$ ) に含まれることはない. 問題なのは  $I_1(\infty)$  だけだが, これは  $E_2$  にも含まれる. まず

$$I_1(s) = (xy + s(x^6 - y^6)) + \mathfrak{n}$$

なので  $I_1(\infty) \supset \mathfrak{n}$  はもちろん成り立つ。つぎに  $s \neq 0$  のとき,  $I_1(s)$  は  $\frac{1}{s}xy + (x^6 - y^6)$  を含むから,  $s \rightarrow \infty$  の極限として  $x^6 - y^6 \in I_1(\infty)$  がわかる。しかしここで

$$I_1(\infty) = \{x^6 - y^6\} + \mathfrak{n}$$

と定めると  $I_1(\infty) \notin X^{[12]}$  になってしまう。正しい答は

$$I_1(\infty) = \{x^6 - y^6\} + \{x^2y, xy^2\} + \mathfrak{n} = V_6(\rho_1) + V_3(\rho_2) + \mathfrak{n}$$

である。こうして  $I_1(\infty) \in \text{Hilb}^\Gamma(X) = (X^{[12]})^\Gamma$  も成り立つ。  $E_2$  の方から同じように  $E_1$  の方へ向かう極限を計算することもできる。計算により

$$I_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} I_1(s), \quad I_2(0) = \lim_{t \rightarrow 0} I_2(t)$$

の2つの極限が一致することが確かめられる。この  $I_1(\infty)$  が  $E_1$  と  $E_2$  の交点になる。このとき  $V(I_1(\infty)) = V_6(\rho_1) + V_3(\rho_2) = \rho_1 + \rho_2$  である。

上の計算で2つの極限  $I_1(\infty), I_2(0)$  が一致する理由は、実は McKay の発見したテンソルの分解法則の図形がディンキン図形  $D_5$  だからである。つまり分解法則のディンキン図形が  $D_5$  であるために例外集合  $E$  が  $D_5$  の形をとる、というシナリオになる。これはマッケイ対応の望ましいひとつの説明になるだろう。もう少し上の計算に則して言うと、 $I_1(\infty) = I_2(0)$  となる理由は

$$\begin{aligned} \{x, y\} \cdot V_2(\rho_1) &= V_3(\rho_2), \\ \{x, y\} \cdot V_5(\rho_2) &= V_6(\rho_1) + \{F\} + HV_2(\rho_3) \end{aligned}$$

という等式の右辺に  $V_3(\rho_2), V_6(\rho_1)$  が出てくる点にある。これらの等式はテンソル積の分解と同等である。実際  $\rho_{\text{nat}} = \{x, y\}$  だから、表現  $\rho_k$  の関係として表せば、

$$\rho_{\text{nat}} \otimes \rho_1 = \rho_2, \quad \rho_{\text{nat}} \otimes \rho_2 = \rho_1 + \rho_0 + \rho_3$$

となる。右辺の余不変式環でのふるまいを問題にすれば  $F, H$  はゼロとして扱われるので、余不変式環を見るということが、ディンキン図形を計算するときの単位表現を無視する操作に対応することがわかる。

余不変式環での右辺の計算は一般には表現のテンソル積とは異なるのだが、 $E_i$  と  $E_j$  の交点を求めるのに必要となる範囲では両者に差はない。これはマッケイ対応の説明として本質的な部分でもあるが、これ以上は省略したい。

## 4.6 一般の場合

以上の議論を一般の場合に書き直して、この解説を終えたいと思う。例外集合  $E$  に属する任意の  $I$  は  $\mathfrak{n}$  を含むので

$$V(I) := I/(\mathfrak{m}I + \mathfrak{n})$$

と定義すると,  $V(I)$  は有限次元  $\Gamma$  加群となる.  $V(I)$  は商加群だが, 実際には  $I$  の部分加群として実現される. たとえば  $V(I_1(t)) = \{xy + t(x^6 - y^6)\}$  である. ここで逆に  $I = V(I)\mathbb{C}[x, y] + \mathfrak{n}$  とすればもとの  $I \in E$  が回復される. この  $V(I)$  を用いて  $\Gamma$  の既約表現の同値類  $\rho, \rho'$  に対し,  $E$  の部分集合をつぎのように定義する:

$$E(\rho) := \{I \in E; V(I) \supset \rho\}$$

$$P(\rho, \rho') := \{I \in E; V(I) \supset \rho \oplus \rho'\}$$

定理 4.7 [伊藤-中村 1999]

$\Gamma$  を  $SL(2, \mathbb{C})$  の有限部分群とする. そのとき

- (1)  $\text{Hilb}^\Gamma(\mathbb{C}^2)$  は  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  の最小特異点解消である.
- (2)  $\Gamma$  の任意の単位表現と異なる既約表現  $\rho$  に対して  $E(\rho)$  は  $\mathbb{P}^1$  と同型な  $E$  の既約成分であり, 対応  $\rho \mapsto E(\rho)$  は  $\Gamma$  の単位表現以外の既約表現の同値類と  $E$  の既約成分の間の 1 対 1 写像を与える.
- (3) 異なる  $\rho$  と  $\rho'$  が表現のディンキン図形のなかで線分で結ばれているときのみ  $P(\rho, \rho') \neq \emptyset$  となり, このとき  $P(\rho, \rho')$  は 1 点となる. さらにそのとき  $E(\rho)$  と  $E(\rho')$  は  $P(\rho, \rho')$  で横断的に交わる. また  $E$  の特異点はこのようにして得られる  $P(\rho, \rho')$  に限る. したがって, ふたつのディンキン図形は一致する.

#### 4.8 説明の概略 — まとめ

マッケイ対応の不思議さはふたつのディンキン図形が一致することだけではなかった. なぜ  $\rho_{\text{nat}}$  とのテンソル積をとり,  $\rho_0$  を除くとうまくいくのか? これも一緒に答えたい問題である. まだ若干の不満はあるのだが, 本稿の説明の概略は (省略した部分もあわせると) 以下のようになる:

- (1) 最小特異点解消の例外集合  $E$  の各点に余不変式環の部分表現が対応し, その対応により単位表現と異なる既約表現の同値類と  $E$  の既約成分の 1 対 1 対応を与える.
- (2) 表現のディンキン図形の線分に対して, 既約成分の交点を構成できる.
- (3)  $E$  の中でふたつの既約成分の交点を計算するために極限をとると, 余不変式環の中で 1 次式の空間  $\{x, y\}$  との積が自然に出てくる.
- (4) 不変式は表現  $\rho_0$  を定める. したがって, 表現のディンキン図形を作るときの  $\rho_0$  を除く操作は, 余不変式環を考えることに相当する.
- (5)  $\{x, y\}$  は  $\rho_{\text{nat}}$  と同じなので, もともと  $\rho_{\text{nat}}$  とのテンソル積は余不変式環での 1 次式の空間  $\{x, y\}$  との積にかなり近いものであるが,
- (6) 余不変式環のなかで既約成分の交点に関係する大切な部分では,  $\{x, y\}$  と



の積と  $\rho_{\text{nat}}$  とのテンソル積の既約表現への分解規則は一致する。  
(7) したがってふたつのディンキン図形が一致する。

#### 4.9 その後の進展

群軌道のヒルベルト・スキームの研究は始まったばかりである。以下敬称を略してその後の進展を述べる。3次元の場合に筆者は筱田健一、五味靖(上智大学)と共同で研究をすすめているが、その計算は計算機なしでは遂行できない。すでに両氏による膨大な計算がある。また2次元で  $\Gamma \subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$  の場合には木藤理恵(北海道大学)、石井亮(京都大学)、Wunram や Riemenschneider(Hamburg)らの研究でほぼ完全になっている。3次元の場合ヒルベルト・スキームの親戚筋にあたるモジュライ空間は、石井亮によって研究が進められている。これは主として群が可換の場合だが、いろいろなモジュライ空間が現われて面白い。このほか 伊藤由佳理(都立大学)-中島啓(京都大学)、Reid(Warwick) とその弟子達によっても、3次元の場合にマッケイ対応の一般化など詳細な研究が進められている。さらに高次元で Roan(台湾) とその弟子による計算例もある。有限群の作用さえあればいくらかでも考えられるものなので、今後はむしろどのような場合が重要かを考えるべきなのであろう。なお本稿で述べた2次元の場合は中島啓の Quiver 多様体によるアプローチもあるが、それは氏自身の解説に譲りたい。(日本評論社 数学の楽しみ 28, 2001年12月号所収)

#### 参考文献

- [B98] R.E.Borcherds, ICM 1998 Berlin vol. 1 (1998) 607–615.
- [Durfee79] A.Durfee, Enseign. Math. **25** (1979) 131–163.
- [G80] D.Gorenstein, Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980) 3–28.
- [伊藤-中村 1999] Y.Ito and I.Nakamura, London Math. Soc. Lecture Note Series 264, Cambridge Univ. Press (1999) 151–233.