高校生と市民のための講座

円周率はほぼ3.14である

北海道大学　　中村　郁

1　問題

2003 年 3 月の東京大学の入試問題に，次のような問題が出題された：

問題　円周率 π は 3.05 より大きいことを証明せよ．

この講義では， 円周率 π の近似値を，簡単な計算で求めてみたい．まず最初に π の値の計算の歴史を少し振り返り，その後で具体的な計算をしてみたい．

円周率 π の計算法はいろいろあるが， まず標準的なのは，円に内接する正多角形の辺の長さの総和を用いる方法である． これは下からの評価を与える．江戸時代の和算は，もっぱらこの方法によっているが，これに工夫を加えることで，建部賢弘は高い精度の近似値を得るのに成功した．このほか，ニュートンはテイラー展開の方法を用いて，やはり高い精度の近似値を得るのに成功した．これは計算もあまり大変ではないが，テイラー展開の原理を説明するのに時間がかかるので，ここでは紹介しない．

井上ひさし「四千万歩の男」の第 4 分冊の「辛酉 (しんゆう) 革命」という章に，円周率を求めた和算の記録がある．　まずそれをながめてみよう．

書籍名	出版年	人名	πの近似値
諸勘分物	1622	百川治兵衛	3.2
割算書	1622	毛利重能	3.16
塵却記	1627	吉田光由	3.16
堅亥録	1639	今村知商	3.162
	1652 – 1659		改善なし
算組	1663	松村茂清	3.1415926
算法根源記	1669	佐藤正興	3.142
算法至源記	1673	前田憲舒	3.1428
増補算法闕疑抄	1684	磯村吉徳	3.1411
玉円極積	1696	古郡氏解	3.1416613
具応算法	1699	三宅賢隆	3.1415928
括要算法	1712	関孝和	3.14159265329
綴術算経		建部賢弘 (1664–1739)	$3.141592653589\cdots$ (小数点以下 42 桁)

表 1: 和算における π の記録

2 目標

ここでは，大学の数学と高校の数学の中間の方法を紹介する．もちろん π をピッタリ求めることはできない．できるだけよい精度で近似値を求めてみよう， というのが目的である．そのために面積の計算しやすい円の一部分だけをとりだして，その面積を計算する．和算のように円周を正多角形の周でおきかえて精度のよい計算をしようとすると，辺の数を大きく (たとえば 128 に) しなければならないが，ここで紹介する方法なら，あまり面倒な計算にはならない．ここで用いる方法では本当は積分の基礎知識が必要になるが，それがなくても理解できる計算であるし，説明もそのようにするつもりである．計算を 2 回実行して，π を上からも下からもおさえる．だから π はこの二つの値の間にある，ということが分かる．結論は：

定理 2.1 円周率 π はつぎの不等式を満たす：

$$3.1411542 < \pi < 3.1425488.$$

3　関孝和の計算

ここで関孝和の計算結果を見てみよう． これも井上ひさしの同じ本の同じ章にあるものを引用する．

h	正 h 角形の周の半分
8	3.06146745892
16	3.12144515225
32	3.13654849054
64	3.14033115695
128	3.14127725093
256	3.14151380114
512	3.14157294036
1024	3.14158772527
2048	3.14159142151
4096	3.14159234557
8192	3.14159257658
16384	3.14159263433
32768	3.14159264877
65536	3.14159265238
131072	3.141592653288 強

表 2: 関孝和の計算

4　面積と積分

この節では，積分の復習をする． この後の円周率の計算のために必要なことだけを復習するので，既に積分を知っている人はとばしてよい．

関数 $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ が与えられた時，次のような記号で $f(x)$ の積分を表わす：

$$\int_0^1 f(x)dx$$

場合によっては中途までの積分

$$\int_0^a f(x)dx$$

を考えることも，中途から中途までの積分を考えることもあるがここでは話を簡単にする為，まず $0 \leqq x \leqq 1$ で考える． ところで

$$\int_0^1 f(x)dx$$

とは何かを復習しよう． 曲線

$$y = f(x) \quad 0 \leqq x \leq 1$$

を考える． これは点 $(x, f(x)) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ を全部つないで書いた図形のことである． 例えば

$$y = x, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4$$

ならば図のようになる．

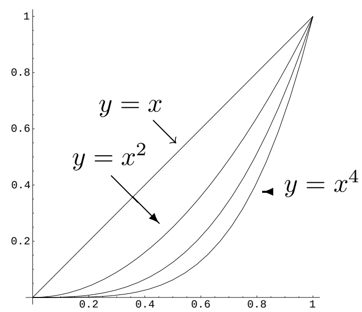

図 1: x^n のグラフ

積分

$$S = \int_0^1 f(x)dx$$

はグラフ $y = f(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸，y 軸と平行な 2 つの直線 $x = 0$, $x = 1$ によって囲まれた部分の面積を表わす

以下その S の計算方法を説明する．区間 $[0, 1]$ を n 等分して，次の図 2 のようにグラフの下に入る長方形を描き，その面積の和をとって S_n とする．

したがって，$f(x) = x$ の場合に具体的には

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}) \\ &= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n - 1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2n^2} \end{aligned}$$

で与えられる． この時

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

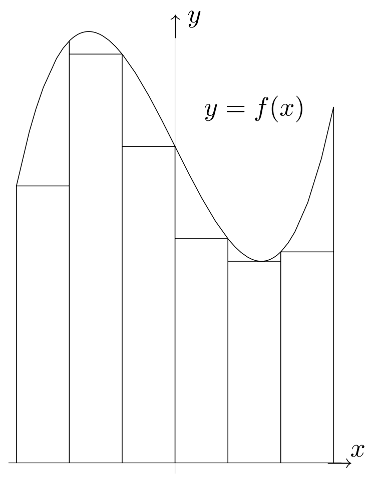

図 2: 面積

として定義する． $f(x) = x$ の場合には，したがって

$$S = \int_0^1 x dx = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

$[0, a]$ の上の積分も $[0, a]$ を n 等分して同じように極限をとって定義する． 例えば，$f(x) = x$ の場合には新しい S_n は

$$S_n = \frac{a}{n}\{\frac{a}{n} + \frac{2a}{n} + \frac{3a}{n} + \cdots + \frac{(n-1)a}{n}\} = \frac{n(n-1)}{2n^2}a^2$$

で与えられる． したがって

$$\begin{aligned} \int_0^a x dx &= \lim_{n \to \infty} S_n \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{2n} a^2 \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

である． 以下同様に $f(x) = x^2$, x^3, x^4 に対して区間 $[0, a]$ 上の積分

$$\int_0^a x^2 dx, \quad \int_0^a x^3 dx, \quad \int_0^a x^4 dx$$

を計算する． まず $f(x) = x^2$ の場合，新しい S_n は次の式で与えられる：

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a}{n}\{(\frac{a}{n})^2 + (\frac{2a}{n})^2 + \cdots + (\frac{n-1}{n}a)^2\} \\ &= \frac{a^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2). \end{aligned}$$

したがって，　和

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2$$

を知りたいのだが，それは次のようにすればよい．

$$\begin{aligned}(n+1)^3-n^3&=3n^2+3n+1,\\ n^3-(n-1)^3&=3(n-1)^2+3(n-1)+1,\\ (n-1)^3-(n-2)^3&=3(n-2)^2+3(n-2)+1,\\ \cdots\quad&=\quad\cdots\\ 2^3-1^3&=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1.\end{aligned}$$

したがって，最初の 1 行を除く両辺を加えると

$$\begin{aligned}n^3-1^3=3\{&1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}\\ &+3\{1+2+\cdots+(n-1)\}\\ &+\{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{(n-1)}\}\end{aligned}$$

ところで

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

だから

$$\begin{aligned}3\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}&=(n^3-1)-\frac{3}{2}n(n-1)-(n-1)\\ &=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n)\end{aligned}$$

となる．　これを繰り返せば，

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3&=A_0n^4+A_1n^3+\cdots+A_4,\\ 1^4+2^4+\cdots+(n-1)^4&=B_0n^5+B_1n^4+\cdots+B_5\end{aligned}$$

となるような n によらない定数 $A_0,\cdots,A_4$, $B_0,\cdots,B_5$ が存在することは納得できるだろう．証明も $n=2$ の場合と同様にやればよいので難しくはない．

　ところで問題は $f(x)=x^2,x^3,x^4$ の場合に $[0,a]$ 上の積分を計算することであった．　以上の計算により

$$\begin{aligned}\int_0^a x^2dx&=\lim_{n\to\infty}\frac{a^3}{6n^3}(2n^3-3n^2+n)\\ &=\frac{a^3}{3}\end{aligned}$$

となる．　また同様にして

$$
\begin{aligned}
\int_0^a x^3 dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{(\frac{a}{n})^3+\cdots+(\frac{n-1}{n}a)^3\}\\
&= \lim\frac{a^4}{n^4}(A_0n^4+A_1n^3+\cdots+A_4)\\
&= A_0a^4,\\
\int_0^a x^4 dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\{(\frac{a}{n})^4+\cdots+(\frac{n-1}{n}a)^4\}\\
&= \lim\frac{a^5}{n^5}(B_0n^5+B_1n^4+\cdots+B_5)\\
&= B_0a^5
\end{aligned}
$$

となる．　したがってあとは，A_0, B_0 を求めればよい．ところが，これも前と同様にして

$$
\begin{aligned}
(n+1)^4-n^4 &= 4n^3+6n^2+4n+1,\\
(n+1)^5-n^5 &= 5n^4+10n^3+10n^2+5n+1
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3 &= \frac{1}{4}n^4+(n^3\text{以下の項}),\\
1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4 &= \frac{1}{5}n^4+(n^4\text{以下の項})
\end{aligned}
$$

となる．　したがって $A_0=\frac{1}{4}$, $B_0=\frac{1}{5}$. これより積分の値は

$$
\int_0^a x^3 dx = \frac{a^4}{4},\quad \int_0^a x^4 dx = \frac{a^5}{5}
$$

である．　特に，$a=\frac{1}{2}$ の場合

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx &= \frac{1}{24},\\
\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 dx &= \frac{1}{64},\\
\int_0^{\frac{1}{2}} x^4 dx &= \frac{1}{160}
\end{aligned}
$$

である．

5　π の上からの評価

まず半径 1 の円を描く：

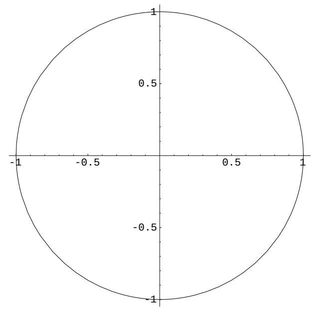

図 3: 半径 1 の円

この曲線の方程式は

$$x^2 + y^2 = 1$$

で与えられる．したがって，上半分は

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

という式で与えられる． したがって，積分を用いると円の 4 分の 1 の面積は

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

と表わされる． しかし, ここではこれは用いない.

ちょっとひねって次のようにしてみる． 区間 $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ の上の面積

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx$$

を計算することを考える． 図で描くと 図 4 のようになる．3 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ を結んだものは正 3 角形であることに注意しよう.

図 4 の左側の扇形の面積を S_1， 右側の 3 角形の面積を S_2 とすると

$$S = S_1 + S_2$$

となる． まず S_2 を求める． 3 角形 S_2 の高さ h はピタゴラスの定理により

$$h^2 + (\frac{1}{2})^2 = (\text{円の半径})^2 = 1,$$

したがって

$$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

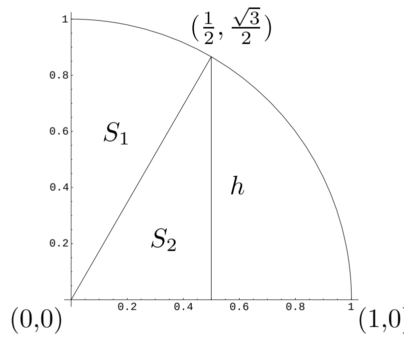

図 4: 扇形と三角形

である． 次に S_1 の面積だが， S_2 は正 3 角形の左半分だから扇形 S_1 の中心角は 30°，したがって

$$S_1 = \frac{30}{360} \times \pi = \frac{\pi}{12}$$

となる． したがって

$$S = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

となる．

次に別の方法で右辺の積分を計算する． このままでは $\sqrt{1-x^2}$ の計算が難しいので，積分計算をもっと具体的に実行できるような簡単な関数によって，上からおさえることを考える．これにはテイラー展開という標準的な方法があって， それを見つけるのは，実は難しくはない．しかし， この一般的な原理を説明するのは，短い時間ではやはり無理なので， その方法から推測される結果を書いて，それを証明することにする．それならやさしい．

理由はさておいて， 次の等式が知られている：

$$\sqrt{1+u} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \cdot 2^k} (-1)^{k-1} u^k \quad (-1 \leqq u \leqq 1).$$

以下ではこの等式は使わないので，その証明もしない．

$u \to -u$ として

$$\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \cdot 2^k} u^k.$$

$u \to x^2$ とすると，

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \cdot 2^k} x^{2k}$$

となる． 右辺は，項を加えるとどんどん小さくなっていく，単調減少級数というもので， 収束の速さは悪くはない．この初めの有限個だけとると， 不

等式が得られるはずである． つまり項を多くするだけ減っていくのだから，少なくとれば $\sqrt{1-x^2}$ を上からおさえることができるはずである．そこで

$$\sqrt{1-x^2} \leqq 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

という形の等式が成り立つはずだが，ここではそれを，つぎの補題で直接証明する.

補題 5.1 つぎの不等式が成り立つ：

$$\sqrt{1-x^2} \leqq 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 \quad (0 \leqq x \leqq 1). \tag{1}$$

証明． 証明のため，

$$g(u) = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2$$

とおく．このとき

$$\sqrt{1-u} \leqq 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 \quad (0 \leqq u \leqq 1). \tag{2}$$

を証明すればよい．$g(u)$ は u が増えるにしたがって減少する． したがって，$u = 1$ のとき，

$$g(1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} > 0$$

だから

$$g(u) \geqq 0 \quad (0 \leqq u \leqq 1)$$

である． そこで不等式を証明するには， 両辺を 2 乗して証明すればよい．

したがって

$$\begin{aligned}
g(u)^2 &= (1 - \frac{1}{2}u(1 + \frac{1}{4}u))^2 \\
&= 1 + (-u)(1 + \frac{1}{4}u) + \frac{1}{4}u^2(1 + \frac{1}{4}u)^2 \\
&= 1 - u - \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}u^2(1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{16}u^2) \\
&= 1 - u + \frac{1}{8}u^3 + \frac{1}{64}u^4 \\
&\geqq 1 - u \qquad (0 \leqq u \leqq 1)
\end{aligned}$$

となる． 以上で補題が証明された． □

したがって，不等式

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx < \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4)dx$$

が成り立つ．右辺の計算をしよう：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4)dx &= \left[x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^3-\frac{1}{40}(\frac{1}{2})^5\end{aligned}$$

したがって，第一の不等式は,

$$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}<\frac{1}{2}-\frac{1}{48}-\frac{1}{1280},$$
$$\pi<6-\frac{1}{4}-\frac{3}{320}-\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

となる．ところで,

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &> 1.7320508, \\ &\quad (\text{ヒトナミニオゴレヤ}) \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} &> 2.5980762, \\ \frac{1}{4} &= 0.2500000, \\ \frac{3}{320} &= 0.0093750\end{aligned}$$

なので,

$$\pi<6-2.8574512=3.1425488$$

となる．

6　π の下からの評価

次に，π を下からおさえることを考える．

補題 6.1　$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のときは, 次の不等式も正しい：

$$\sqrt{1-x^2} \geqq 1-\frac{1}{2}x^2-\alpha_{\min}x^4$$

ただし，$\alpha_{\min}=14-8\sqrt{3}=0.14359353\cdots$． ■

この形の正しい不等式のうちで，$\alpha_{\min}$ は最も小さいもの，つまり不等式としては最良のものを選んである．$\alpha_{\min}$ より大きいものをとれば, もちろん正しい．たとえば, $\alpha_{\min}$ のかわりに $\frac{1}{6}$ をとっても不等式は成立する．次の節で補題の証明を与えるが，初めの場合とほとんど同じである．

この不等式を用いて円周率 π の下からの評価を求めてみると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx \\
&> \int_0^{\frac{1}{2}} (1-\frac{1}{2}x^2-\alpha_{\min}x^4)dx \\
&\geqq \left[x-\frac{1}{6}x^3-\frac{\alpha_{\min}}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&\geqq \frac{1}{2}-\frac{1}{48}-\frac{1}{160}(14-8\sqrt{3}).
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\frac{\pi}{12} > \frac{1}{2}-\frac{1}{48}-\frac{14}{160}-\frac{3}{40}\sqrt{3} = \frac{47}{120}-\frac{3}{40}\sqrt{3}.
$$

これを整理すると第二の不等式を得る：

$$
\pi > \frac{1}{10}(47-9\sqrt{3}) > 3.1411542.
$$

これらの計算の計算量は和算と比べればはるかに少ないはずだが， 到達した記録は前田憲舒 (1673) ，磯村吉徳 (1684) より少し良くて， 松村茂清 (1663), 三宅賢隆 (1699) よりは落ちる．もちろん関孝和や建部賢弘は別格である．表 2 の正多角形の場合と比較すれば，上の計算は正 128 角形程度に相当する．この計算から，ともあれ円周率 π はほぼ 3.14 であることがわかる．(しかし 3 ではない．） 参考のために付け加えておくと, 最初の入試問題の解答となるのは, 正 8 角形の場合からであるが, 正 8 角形の場合でさえ, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ を計算しなければならない．さらに, 辺の数が 2 倍になるごとに，1 回ずつ 2 乗根をとっていかなければならないので，正多角形の周の計算は少しわずらわしいようである．

7 補題 6.1 の証明

この節では補題 6.1 を証明する． すなわち次の不等式

$$
\sqrt{1-x^2} \geqq 1-\frac{1}{2}x^2-\alpha_{\min}x^4 \quad (0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}) \tag{3}
$$

を証明する． ただし $\alpha_{\min}=14-8\sqrt{3}$. 以下 $\alpha_{\min}$ の代わりに α を用いる．

前と同様に $u=x^2$ と置き換えて $0 \leqq u \leqq \frac{1}{4}$ の時，次を証明すればよい．

$$
1-\frac{1}{2}u-\alpha u^2 \geqq 0 \tag{4}
$$

$$
\sqrt{1-u} \geqq 1-\frac{1}{2}u-\alpha u^2 \geqq 0. \tag{5}
$$

不等式 (4) が成り立つためには，$u = \frac{1}{4}$ の時に成り立てば十分で，したがって

$$\alpha \leqq 14 \tag{6}$$

ならばよい．

不等式 (4) が成り立つので，不等式 (5) を証明するには，次のことを証明すれば十分である：

$$(1+2\alpha u)^2 \leqq 8\alpha.$$

左辺は u の単調増加関数なので，$u = \frac{1}{4}$ の時，最大値をとる． したがって，次の不等式が成り立てばよい：

$$\alpha^2 - 28\alpha + 4 \leqq 0.$$

これより

$$14 - 8\sqrt{3} \leqq \alpha \leqq 14 + 8\sqrt{3}$$

となるが，この不等式と不等式 (6) を満たす最小の α は $\alpha_{\min}$ に他ならない．以上で補題 6.1 が証明された．

参考文献

井上ひさし，「四千万歩の男」 1, 2, 3, 4, 5, 講談社文庫.

8　付録 1

補題 5.1 のような命題はどうやって見つけたらいいのだろう．ここで，見つけ方を考えてみよう．補題 5.1 の証明でも式 (2) の証明を与えているだけだから，同じように考えて

$$\sqrt{1-u} \leqq 1 + a_1 u + a_2 u^2 \quad (0 \leqq u \leqq 1)$$

となるような a_1, a_2 で最小のものを探すことを考えてみよう．そこで，まず両辺を 2 乗すると，

$$1 - u \leqq 1 + 2a_1 u + (a_1^2 + 2a_2)u^2 + 2a_1 a_2 u^3 + a_2^2 u^4$$

となる．したがって

$$(2a_1 + 1)u + (a_1^2 + 2a_2)u^2 + 2a_1 a_2 u^3 + a_2^2 u^4 \geqq 0$$

が成り立つように a_1, a_2 を選べばよい．$u = 0$ の時はどんな a_1, a_2 に対しても成立しているから，$0 < u \leqq 1$ の場合を考えればよいが，$0 < u$ ならば，$\frac{1}{u}$ をかけて

$$2a_1 + 1 + (a_1^2 + 2a_2)u + 2a_1 a_2 u^2 + a_2^2 u^3 \geqq 0$$

$u = 0$ とすれば $2a_1 + 1 \geqq 0$ となる．したがって，これを満たす最小の $a_1 = -\frac{1}{2}$ をとることにする．$a_1 = -\frac{1}{2}$ を代入して，$u > 0$ を考慮すると

$$2a_2 + \frac{1}{4} - a_2 u + a_2^2 u^2 \geqq 0$$

となる．したがって $2a_2 + \frac{1}{4} \geqq 0$ となる．ここでもこの式を満たす最小の $a_2 = -\frac{1}{8}$ を選べば，

$$g(u) = 1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8}$$

は次の不等式

$$\sqrt{1-u} \leqq 1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8}$$

を満たすはずである．この不等式の証明はすでに補題 5.1 で見た通りである．

9　付録 2

円周率の近似値は解析概論によれば，次の方法が効率的である．まず次の $\operatorname{Arctan} x$ のテイラー展開を思い出す：

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots . \quad (-1 < x < 1) \tag{7}$$

$\mathrm{Arctan}\, x$ という関数の意味は以下の通りである：

$$\theta = \mathrm{Arctan}\, x \quad (-1 < x < 1)$$

は

$$x = \tan\theta \quad (-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4})$$

と同等である．θ はその $\tan$ の値が x に等しくなるような $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ （すなわち $-45° < \theta < 45°$）の間にある唯一の角度である．θ を，従って $\mathrm{Arctan}\, x$ をラジアンで考えると，$-1 < x < 1$ であれば，上の級数展開が成立する．もっと直接的に言い換えれば次のようになる．

$-1 < x < 1$ のとき，不等式

$$-\frac{\pi}{4} < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots < \frac{\pi}{4}$$

が成り立ち，しかも関係式

$$\tan(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \cdots) = x$$

が成り立つというのである．

級数 (7) の成立の証明は，あとで与える．

この関係式 (7) は $x = 1$ の時にも正しく，$\theta = \mathrm{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4}$ であることを考慮すれば

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

という関係が成立するが，この級数は収束が極端に遅く，π の近似値を求めるには適さない．これは積分の計算によった場合の，4 分の 1 円の面積の計算を避けるのと同じである．$\mathrm{Arctan}\, x$ を用いた，もっとうまい計算がある．これは非常に収束も早く，先程の計算よりも簡単により精度の高い近似値を得る．

まず最初に，$\tan\alpha = \frac{1}{5}$ となる $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ をとる．これは唯ひとつ存在する．この時

$$\alpha = 11°19', \quad 4\alpha = 45°16' \doteqdot \frac{\pi}{4}$$

となり，4α はほんの僅かに $\frac{\pi}{4}$ より大きい．$\tan$ の和公式，倍角公式を用い

て，$\tan(4\alpha - \frac{\pi}{4})$ を計算してみる．

$$\begin{aligned}
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{5}{12}, \\
\tan 4\alpha &= \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{120}{119}, \quad (\text{注. } \tan\frac{\alpha}{4} = 1 \text{ に近い}) \\
\tan(4\alpha - \frac{\pi}{4}) &= \frac{\tan 4\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\alpha \tan\frac{\alpha}{4}} = \frac{\frac{1}{119}}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.
\end{aligned}$$

ここで Arctan の定義により，

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}, \quad \alpha = \operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$$

に注意する．従って

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 4\alpha - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}, \\
&= 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}, \qquad (8) \\
\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \cdots, \\
\operatorname{Arctan}\frac{1}{239} &= \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7 + \cdots.
\end{aligned}$$

これを $\frac{\pi}{4}$ の右辺 (8) に代入すれば

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} = 4&\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right) \\
&- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

これより次の近似値を得る．

$$\pi = 3.141592\cdots$$

鹿 sh これで満足するのはよして，$\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$ と $\operatorname{Arctan}\frac{1}{239}$ をもう少し収束の早い形に書き改めて，誤差を正確に評価することにしよう．

$$\begin{aligned}
A &= \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \\
&= (\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3}) + (\frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7}) + (\frac{1}{9\cdot 5^9} - \frac{1}{11\cdot 5^{11}}) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(4n+1)5^{4n+1}} - \frac{1}{(4n+3)5^{4n+3}}\right\}
\end{aligned}$$

ここで

$$A_n = \frac{1}{(4n+1)5^{4n+1}} - \frac{1}{(4n+3)5^{4n+3}}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{(4n+1)(4n+3)\cdot 5^{4n+3}}\left(25(4n+3)-(4n+1)\right) \\ &= \frac{96n+74}{(4n+1)(4n+3)\cdot 5^{4n+3}}. \end{aligned}$$

このとき

$$A_n \leqq \frac{6}{n\cdot 5^{4n+3}}$$

が成り立つ．実際，これは次の不等式

$$(96n+74)n \leqq 6(4n+1)(4n+3) = 96n^2 + 96n + 18$$

より，直ちに分かる．したがって

$$A_n^* := A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \cdots \quad \leqq \frac{6}{n}\cdot\frac{1}{5^{4n+3}}\cdot\frac{5^4}{624} = \frac{1}{104\cdot n\cdot 5^{4n-1}}$$

$n=3$ に選ぶと

$$A_3^* = A_3 + A_4 + A_5 + \cdots \quad < \frac{1}{312}\cdot\frac{1}{5^{11}} = \frac{1}{1560}\cdot\frac{1}{5^{10}}$$

となるが $2^{10} = 1024 < 1560$ に注意すると，

$$A_3^* = A_3 + A_4 + A_5 + \cdots \quad < \frac{1}{2^{10}\cdot 5^{10}} = \frac{1}{10^{10}}$$

が成り立つ．次に $\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}$ についても同じように考えて

$$B_n = \frac{1}{4n+1}\cdot\frac{1}{239^{4n+1}} - \frac{1}{4n+3}\cdot\frac{1}{239^{4n+3}}$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned} B_n &< \frac{14280}{n}\cdot\frac{1}{239^{4n+3}} \\ B_n^* :=& B_n + B_{n+1} + B_{n+2} + \cdots \quad < \frac{14280}{n}\cdot\frac{1}{239^{4n+3}}\cdot\frac{239^4}{239^4-1} \end{aligned}$$

$n=1$ とすれば

$$B_1^* \leqq \frac{14280}{239^3}\cdot\frac{1}{239^4-1} \leqq \frac{1}{239^5}\cdot\frac{14280}{239^2-1} < \frac{1}{10^{12}}$$

以上より

$$\frac{\pi}{4} = 4(A_0 + A_1 + A_2) - B_0 + (4A_3^* - B_1^*)$$
$$|16A_3^* - 4B_1^*| \leqq \frac{16}{10^{10}} + \frac{4}{10^{12}} < \frac{5}{10^9}$$

したがって π の近似値を $16(A_0+A_1+A_2)-4B_0$ にとれば真の値との誤差は $\frac{5}{10^9}$ を超えないので，10^{-8} の位まで正しい．計算すると

$$16(A_0+A_1+A_2)-4B_0 = 3.141592652\cdots$$

である．したがって

$$\pi = 3.141592652\cdots \pm 0.0000000017$$

となる．これは小数点以下第 8 位まで正しい値を与える．