平面幾何の旅質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. １ (２００１年４月１７日) の分

問． ユークリッド幾何とはそもそも何ですか？「幾何」というものが，単なる「図形に関するもの」という認識しかないのですが．

答． こんにちは．さて，幾何は図形に関するもの，という点は正しい認識だと思います．でも,「図形とは何か」ということは，それほど明らかではありません．私 (石川) は，複雑なことがらの仕組みを理解することがすなわち「図形化」であると思うので，幾何は世界を認識するための重要な方法と考えています．それはともかくとして，ユークリッド幾何学は,「図形を長さや角度を使って調べる学問」であると言えます．そして，その調べ方が，それ以後に生まれてきた新しい学問の雛形になったという意味あいがあります．この講義では，ユークリッド幾何のうち，平面幾何の有名な定理を鑑賞します．

問． 公理，定理，定義のちがいが解りません．

答． 公理は理論の前提，定義は用語の説明，定理は公理から論理的に導かれる結論です．

問． ユークリッドというのはどういう人ですか？「ユークリッドの互除法」というのを思いだすのですが，ユークリッドは幾何だけでなく，代数学も研究していたのですか？

答． 「幾何学原論」の著者です．ユークリッドについては詳しいことは知られていません．謎の人です．個人名ではなく集団の名前であるという説さえあります．ところで，幾何に比べると，代数学ができたのは比較的新しく，ユークリッドの時代には，代数学はありませんでした．歴史的にみると，代数学に属する事柄でも，あくまで幾何学をして研究していたと推測できます．

問． 幾何学はなぜ生まれたのですか？

答． 幾何学 (geometry) は，測量から生まれたと言われています．

問． 三角比と幾何学は違うのですか？

答． 三角比は幾何学の起原です．

問． 「幾何学に王道なし」という言葉は，どのような状況から生まれたのでしょうか？

答． ユークリッドがある国の国王の家庭教師をしていて，国王が「ユークリッド先生，もう少し楽をして幾何学を学ぶ方法はないですか」と尋ねたとき，ユークリッドが「殿下，幾何学に王道はございません」，つまり，特別な方法はない，と答えたというエピソードが残っています．

問． ユークリッド幾何とは２〜３時間もかかる内容なのです？

答． 詳しく話せば，何年もかかるところを，かいつまんでお話します．幾何学に王道はないのですが，忙しい現代社会なので，なるべく効率よく，ユークリッド幾何の目玉商品だけを学ぼうという企画です．ですから，この講義は「平面幾何の王道」とも言えますね．

問． 平面幾何とは何でしょうか？

答． 平面上で行う幾何のことです．立体幾何ではなく平面幾何ということです．ただし，射影平面に話が進んでいくと，実は３次元の幾何も平面幾何に関係してきます．(３次元の影が平面にあるとみなしたりするので).

問． 平面幾何で面白く，発展性のあるのはどのようなことですか？

答． すべてです．要は「切り口」の問題なのであって，どんなに古臭い学問と思われるものも，若い新鮮な考え方をすれば蘇ります．たとえば，最近のコンピュータ・グラフィックスの世界では射影幾何の重要性が再認識されています．立体的な物体をどのように平面上に表現するか，ということなので，それは当然な発想ですね．

問． 平面幾何が私たちの身の回りですぐに実感できるものはありますか？

答． 幾何学の起原が測量なので，たとえば，隣の家との境界線の争いで実感できるかもしれません．そうでなくても，私達は，日常生活でつねに平面図形を見て生活しています．平面幾何の世界に住んでいると言っても過言ではありません．ただし普段は，そこに平面幾何を見い出す時間的精神的余裕がないだけなのかも知れません．

問． 「最後の晩餐」の話が出てきましたが，どのように幾何が使われているのですか？

答． 無限遠点 (むげんえんてん) を図の中に描くことによって，遠近感を強調していると言われています．関係ないですが，昔，イタリアのミラノを旅したとき，本物の最後の晩餐の絵を見に，ある小さな教会を訪れたのですが，修復中ということで．残念ながら見られませんでした．最近，その修復事業が完成したらしいですね．

問． 投影図法でも,「平行」が定義できるのですか？

答． 射影幾何の世界では，平行線という概念はなくなります．

問． 何かの本で「射影幾何では平行線の交わる」といったような文句を読んだ気がするのですが，本当ですか？

答． 本当です．この講義で詳しく説明します．ところで，この夏にでも北海道内を旅行すると，広々とした景色がひろがり,「平行線が交わる」と実感できるかなと思います．

問． ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学の違いについて詳しく説明してほしいです．

答． この講義でユークリッド幾何における「平行線の公理」を説明しますが，(他の公理はそのままで) 平行線の公理を除外して，別の公理をもとにできる幾何学を非ユークリッド幾何と言います．たとえば，双曲面上の幾何や球面幾何です．１点を通り，１直線に平行な直線が無限にあったり，１つも無かったりします．(射影幾何のある意味では非ユークリッド幾何ですが，射影幾何では，長さの概念もなくなります．)

問． 球面を対象とした幾何学などはあるのでしょうか？

答． あります．球面幾何学では，直線に代わる対象は「測地線」つまり「大円」です．このとき，１つの大円に対し，１点を通る大円は無数にありますね．

問． ユークリッド幾何は，近代の射影幾何や位相幾何になると適用できなくなるのでしょうか？

答． 適用できます．ユークリッド幾何の定理は，永遠に正しいのは確かです．ただし，考え方，ものの見方に発展があって射影幾何や位相幾何が生まれたので，発想自体が異なると言えます．また，時代が下れば，幾何が扱う世界も当然拡がっていきます．したがって，扱う対象が違えば，適用できない，あるいは適用しても無意味な場合ももちろん生じます．

問． ユークリッド幾何，射影幾何などの分類は，学問の成熟度によっての分類なのでしょうか？もしくはそれぞれの名称の幾何学に特有の方法論などが存在し，それぞれが特有の世界を持っているのでしょうか？

答． 成熟度というよりは，方法論と対象の違いだと思います．ユークリッド幾何は十分成熟した (成熟しすぎた?) 学問です．

問． リーマン幾何学とはどういうものですか？

答． 曲がった曲面や多様体などを扱う幾何学です．「リーマン」という数学者が作りました．

問． 相対性理論に関わる幾何学は授業で扱いますか？

答． アインシュタインはリーマン幾何を使って，一般相対性理論リーマン幾何学のことだと思いますが，この講義では残念ながら扱いません．

問． トポロジーとは具体的には，どのような数学なのでしょうか？位相幾何学には，幾何学からのアプローチと，集合論的なアプローチの仕方があるように思います．

答． トポロジー (Topology) という言葉は,「位相」あるいは「位相構造」という概念の名前に使う場合と，その位相という概念に基づいて図形を研究する学問の名前に使います．後者の意味では,「位相幾何学 (いそうきかがく)」と訳されます．一番わかりやすい説明は,「位相幾何学とは，メビウスの帯やクラインの壷などを研究する幾何学」でしょうか．「トポロジー入門」という本が店頭に並んでいる場合，それは「位相入門」なのか「位相幾何学入門」なのかは表題だけからはわかりませんが，質問のように２種類あることになります．

問． トポロジーの応用価値とは何ですか？

答． 初めはあまり応用のことは考慮されずに，純粋に数学的に研究され発展してきたのですが，最近，グラフ理論，DNA の結び目，タンパク質の構造，素粒子論とゲージ理論，物性理論，などなど多くの分野に応用されるようになっています．「三年寝太郎」という話がありますが，何だか役に立たないなあ，というものが意外に役に立つようになるという例はたくさんあります．

問． どうすれば幾何学がわかるようになりますか？

答． えーと，それがわかったら私 (石川) に教えてください．それはともかく，問題を図を使って解いた経験があれば，もう幾何学がわかったと言えるかも知れません．

問． ３次元までは図示できますが，４次元というものにも幾何の知識は使えますか？

答． もちろん使えます．人間には幸い「類推する」「拡張する」という能力があるので，実際に目に見えなくても，想像することができます．そして，いろいろな結論を，４次元以上の図形に対しても証明することができます．人間の能力というのはすばらしいものです．そもそも３次元を図示すると言っても，実際は平面上に図を書いて，それから３次元を類推しているので，それと同じことです．

問． 最近テレビで見たのですが,「球体の表面が３次元」とはどういうことですか？普通，球体の表面は２次元で，中身は３次元ですが，そのテレビによると，存在するかどうかは別として，表面が３次元で，中身が４次元という考え方ができるそうです．

答． ４次元球体の表面 (境界) は３次元球面です．存在します．少なくとも考えられます．ところで，そのテレビ番組はひょっとして,「やまとなでしこ」というドラマのせりふですか？関係ないかな．

問． 複素平面の「無限遠点」というのは何ですか？

答． この講義で，射影平面を作るときも，無限遠点というものを考えるのですが，それと複素平面の「無限遠点」は別物です．誤解のないようにしてください．それはそれとして，説明すると，複素平面を３次元空間の中に置き，球面と球面上の北極からの「立体射影」で対応させると，球面の北極を除いた部分と複素平面全体が対応します．複素平面上の点がどんどん遠くにいくと，球面上の対応する点は，どんどん北極に近づいてきます．そこで，北極を無限遠点であるとみなせば，複素平面に無限遠点を付け加えて，球面ができることになります．

問． 自然界に存在する図形について考えることがあるのはわかりますが，現実には存在しないようなことまで数学では考えられていると思います．

答． なるほど．でも，考えてみると,「自然界に存在する」かどうかは難しい問題ですね．たとえば，平面幾何の舞台である「平面」ですが，自然界に存在するでしょうか？単純に考えて，無限に拡がる平面は，自然界に存在しませんね．所詮，人間が想像したものですね．では，平面の一部分でも自然界に存在するでしょうか？本当に平らな面は存在しないでしょうね．所詮，人間の想像力のたまものですね．数字もそうです．どこにも「１」は存在しませんね．街の中で，１や２が行列していたらこわいです．数字も想像物ですね．(書いてある数字そのものではなく，数という概念のことです)．現実に存在するかどうか，ということは，いかに現実を詳しく観察しているかによるのであって，一見，存在しないようなものでも，現実を理解するのに必要なものなら研究する価値があるわけです．

問． 高校では，平面幾何は教わりませんでした．この講義についていけるでしょうか？大丈夫でしょうか？

答． 大丈夫です．中学で習った程度の知識で十分です．それより皆さんに期待しているのは,「知的好奇心」と「論理的な考え方」と「自由な発想」です．

問． 僕の学校では，入試に出ないからとかいう，わけのわからない理由で平面幾何の授業をやらなかったんです．入試に出るとか出ないとか，そういうんじゃないだろうと思って，自分で少しはやったんですが，完璧だといえる程ではありません．

答． そうでしたか．それだけのやる気があれば万全です．ただし，この講義は，ゆっくり進む予定なので，物足りない人がでてくるかもしれません．ところで，まあ，入試がある以上仕方ないのでしょうが，試験に出るから勉強するというのは，本末転倒だし発想が少し不健全ですよね．

問． 高校の数学の時間には,「入試に出ない」という教師の一言で平面幾何が飛ばされました．仕方がないので，自分で参考書を読んで，定理だけ (証明はできない) は暗記しました．教科書に載っているのですから，重要な学問であるはずです．自分の見えないところで重要な役割を果たしているのならば，ぜひ知りたいです．

答． この講義で詳しく証明するので御安心を．さて，ユークリッド幾何は，すべての学問の雛形であり，科学技術の基本なので重要です．もちろん，平面幾何がわかったから，何でもわかったことになる，というわけではありませんが,「わかる能力」を確実に高めます．考える能力と平面幾何の理解力は比例すると考えられます．世の中，問題と解決の連続です．平面幾何を学びことを通して，論理的に推論したり，ああでもないこうでもないと集中して考えて問題を解決する実感が味わえます．このように，自分の見えないところで重要な役割を果たします．

問． 高校の時は授業では平面幾何は扱わず，なぜなのか先生に聞くと,「図形の問題は，座標や方程式や位置ベクトルな

どのほうが拡張性があるので，平面幾何を使うのはあまりオススメできない」と言われました．平面幾何の長所を教えてください．

答． この先生の言っている平面幾何は「古典的な平面幾何」を指しているので，そこから後で発展した座標や方程式や位置ベクトルの方が拡張性，一般性があるというのは確かですね．たとえると,「そろばん」を使って計算することと「電卓」を使って計算することの違い，あるいは,「手計算」と「コンピュータ計算」の違いのようです．電卓を使えば計算は早いですが，(慣れれば，そろばんの方が早いかもしれませんが)，やはり，位取りなどの計算の仕組みをわかるためには，そろばんを勉強するのがよい，と言われています．要はバランスの問題ですが，平面幾何には，歴史的に最初に形づけられただけあって，図形に根ざした考え方が身につき，理解しやすさ，発想の自然さ，の長所があります．

問． 図形問題を解く上で，問題図に自分で「補助線」を引いたり，といったことが全くできませんでした．何かコツのようなものがあるのでしょうか？中学校の頃ぐらいから数学の図形問題に苦手意識を持ち始めました．

答． あまり気にしなくてもよいです．でも，もし「発見のよろこび」を味わいときは，とりあえず幾何の問題を何でもよいから選んで，暇なときに時間をかけて考えて，わからなくても解答を見ないで辛抱して，そうですね，一週間ほど考えつづければ必ず解けます．このとき，自分で解くということが大切で，自分で解決するという体験をすれば，その一週間で世界が変わるかも知れません．

問． 高校時代，幾何の授業がなかったので，大学に行って勉強するのを楽しみにしていました．

答． そう言ってもらえると教えがいがあります．ただし，この講義では，幾何の一部分しか紹介できないと思うので，万一つまらないと思っても，幾何がつまらない，とは思わないでほしいなあというのが私 (石川) の願いです．

問． 平面幾何は他の分野と異なる数学なのでしょうか？

答． とくに異なるということはないと思います．数学で必要な論理的能力を身に付け，定理やその証明を発見する喜びを味わうのに最適な分野だと思います．

問． ２次元ベクトルも平面幾何の分野に入りますか？

答． 平面上の幾何なので，もちろん入ります．ただし，ベクトルという考え方ができたのは，せいぜい１８世紀ぐらいなので，それ以前は，平面幾何の問題はベクトルを使わないで考えられていたことになります．

問． 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離を求める式 $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ がどうして導かれるのかわかりません．

答． 直線の単位法線ベクトルは，$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ なので，式 $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ が法線方向に進んだ距離を表すからです．

問． 平面幾何の扱う分野の範囲は何ですか？曲げられた平面も扱いますか？

答． この講義では，曲面はあまり扱いません．(ただし，射影平面はある種の曲面として実現されます)．

問． 以前「高校生のための夏期講座」を函館で受けました．その後，夏期講座は続いているのですか？

答． なつかしいですね．いろいろな担当者がいろいろな場所でやっています．

問． 僕は北見出身なんですが，北見の農家のおっさんが，任意の角を３等分にするという，あのできないって証明されている問題は解けるとか言って，変な本まで発売してたのですが，その後がどうなったかわかりません．何か知りませんか？

答． 知りません．まあ，この手の変人はたくさんいます．家族の人は大変でしょうが，好きなことができて本人がしあわせなら，良いのではないかなとも思います．やりたいことをやらずに我慢して，不満ばかり言っている人が世の中には多いですが，そういう人たちよりは，私 (石川) はそのおじさんを尊敬したくなります．

問． 角の３等分線は，コンパスと定規では引けない理由 (証明) を教えてください．「倍の体積の立方体の作図」「円と同面積の正方形の作図」「角の３等分線の作図」が不可能であると証明されたようですが，その証明をわかりやすく説明してください．

答． たとえば，H. デリー著，根上訳「数学１００の勝利」平面図形の問題，シュプリンガー東京，という本に書いてあります．他の啓蒙書にも載っています．

問． 定規とコンパスだけを使い，正確な７２ °を作る (正５角形を作る) をのにはどうしたらよいのでしょうか？

答． 代数的な説明は知っていますが，初等的な方法は知りません．ぜひ調べて教えてください．

問． 正多面体というのは限られた数しかないと聞いたことがあります．

答． プラトンの定理ですね．オイラー標数を考えるとすぐ導かれますが，この講義のテーマではないので，ここでは説明しません．

問． 「黄金比」$1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ というのは，どうやって決まったのでしょうか？

答． フィボナッチ数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ と関係して決まる数です．でもそれがどうして美しい割合なのかは謎ですね．

問． 中学，高校と，点とは面積のないもので，線とは面積のない点の集合で長さのみをもつものと習いましたが，平面とは面積を持たない線の集合であるとも習いました．面積のないものが集まることによって面積が生まれるという一見矛盾した理論が未だによく分かりません．

答． 面積が 0 のものを可算無限個あわせても，やはり面積は 0 です．でも，連続無限個あわされば，面積が生じるということだけです．

問． 円の面積と周の正確な値は何ですか？円周率はどうやって求めているのですか？

答． π です．無理数なので，有限小数では求まりません．その近似値を求めるいろいろな式があります．たとえば，アークタンジェントを使う方法とか，連分数を使う方法があります．詳しいことは，たとえば，名著，小林昭七著「円の数学」裳華房，を読むとよいと思います．

問． 多くの線で区切られた図形を４色で塗り分けられるなら，それは本当にどんな図形でも通用するのか，証明があるならそれを知りたいです．

答．

四色問題ですね．証明は計算機を使って「シラミつぶし」によるもので，ここでは再現できません．(興味深い証明であるとは言い難いと思います)．

問． 幾何学というのは，なぜこのような名前に命名されたのですか？

答． 英語の geometry は地球と関係する ”geo” から来ている言葉でしょう.「幾何」ということばは中国から来たことば

ですが，語源は知りません．専門家として即答できないのはお恥ずかしい限りです．調べてみましょう．

問．幾何学の種類はどのくらいあるのですか？また，それらはどんな事象に対し使われいるのですか？さらに，北大ではどれが扱われているのですか？

答．分け方に依るし，応用のされ方も千差万別です．現在活発に研究されている分野を大きく分けると，位相幾何と微分幾何と代数幾何ということになると思いますが，現在は，これらを組み合わせた研究，学際的な研究が盛んです．北大は幾何学の国際的中心の１つで，どの分野も研究されています．

問．参考書の中で，幾何について全く知らなくても読んでいけるような入門的な本はどれでしょうか？

答．すべてそうですが，特に小平さんの本は文庫本なので入手しやすいと思います．

問．三角形の外接円上の１点から三角形の各辺におろした垂線と各辺との交点が一直線上にあるのは，どうやって証明するのでしょうか？

答．「シムソンの定理」ですね．この講義で扱うかどうか (つまり観光コースに入れるかどうか) 迷ったのですが，時間の都合により割愛することにしています．小平さんの本に証明が書いてあるので，参考にしてください．

問．小平邦彦という人は，いつ，どのような功績でフィールズ賞を受賞したのでしょうか？

答．調和積分論による受賞ですが，その後の代数幾何，複素曲面の研究もすばらしい業績です．

問．ユークリッドの「原論」自体を読んでみたいのですが，読んで効果がどれくらいあるのですか？

答．あまり効果はないと思います．私 (石川) も持っていますが，実は，眺めるだけで，ちゃんと読んだことはありません．

問．なぜ時計は６０進法なのですか？なぜ１回転は３６０ °なのですか？僕の予想だと３６０は約数が多いから選ばれたのだと思います．

答．その通りだと思います．

問．掛け算で，(マイナス) × (マイナス) = (プラス) になる，という必然性がわかりません．

答．数直線を「ひっくり返す」という操作が -1 を掛けるということと見なされ，それを２回続けると何もしないこと，つまり 1 を掛けることになるので，$(-1) \times (-1) = 1$ は自然ですね．

問．平面幾何の様々な定理や法則というのは，どんなきっかけで発見されたのでしょうか？ピタゴラスの定理は，ピタゴラスが床のタイルの形を見たときに偶然思いついたものだと聞きました．数学 (とくに平面幾何) の分野において偉大な発見というのはどのようにして生まれたのでしょうか？

答．いろいろあるでしょうが，やはり最初は偶然でしょう．でも,「思いつき」は何も努力していなければ絶対得られないもので，普段，努力して追い求めていて，そして気分を変えて，別のことをやっているときに得られることが多いようです．

問．平面幾何をやるにあたって図学の道具は必要でしょうか？

答．必要ありません．フリーハンドで十分です．強いて言えば，定規は役に立ちます．

問．学習要領３割削減などに伴い，子供さえ幾何学から離れてしまうのは非常に恐ろしい．

答．同感です．

問．この授業を通して，学生に何を学んでほしいと考えていますか？教える立場の人間として，生徒に平面幾何というものを教える本当の意義とは何ですか？

答．平面幾何の講義を通じて，考える力を (文部科学省の言うような一般論ではなく，具体的な方法で) 身に付けてほしいと考えています．もちろん幾何の定理自体も重要ですが，その結果を得るまでのプロセスや，発想も非常に大事だと思います．

問．この講義を履修することによってどのような能力を身に付けることができるのですか？古代の学問であるので，新しい発見はできないと思いますが，それが現代の学問をするのに役立ちますか？

答．何をもって役に立つというかは問題ですが，たとえば，科学技術の世界で良い仕事をした人の多くが，平面幾何の愛好者であるようです．独創性と何か関連があるのかも知れません．

問．幾何学の未来には興味があります．現代幾何学はどこに向かっているのですか？未来の幾何学とは，いったいどのようなものでしょうか？

答．この講義を通して，一緒に考えていきましょう．

問．幾何の目的のようなものはありますか？幾何学は，自然科学の中から，何を最終的な目標として生まれたかが知りたいです．幾何の魅力は何でしょうか？

答．酔ったときに私 (石川) が言うセリフに「幾何学は後ろ向きに世界観を語る」というものがあります．前向きの学問ではないわけです．でもこれは否定的な評価ではなく，事実を表面的に手早く知る，という態度とは逆に，その事実の背景に何があるか，ということを解明し，説明するのが幾何学の役目であるということです．数学や物理などの分野は，成熟するとしばしば「幾何学化される」といわれます．

問．どうしてあらゆる学問の雛形と言われる「ユークリッド幾何」は教えられなくなったのですか？プリントに書いてあるように目先の実利主義が競争社会を生き抜くためという理由だけで現代の科学技術の生みの親と言っても過言ではないユークリッド幾何が省みられなくなったというのは説明を聞く限り納得はできません．それだけ永い歴史を生き抜いてきたものが省みられなくなったのは，何か問題があったのですか？

答．中世のユークリッド幾何の研究者に問題があったのだと思います．ユークリッド幾何はすばらしいが，そのすでに出来上がった学問を後生大事に守って，新しい発想で研究することをしなかったことが原因で，人々から省みられなくなっていったと推測されます．ところで，数学は，古代ギリシャの時代に盛んに研究されましたが，ローマ時代になると，実用的なものに関心が移って数学が衰退したそうです．その数学がなぜ現代に生き残って，私たちが学べるのか．それはクレオパトラが学問好きで，ギリシャ時代の書物を収集し，アレクサンドリアに立派な図書館を作り，そのおかげで，さまざまな戦乱を生き延びて，現代に残っているそうです．今私たちが学んでいることのどれが将来まで生き残っていくのでしょうか？

問．質問書を書く時間はどれくらいもらえますか？

答．講義の最後に１０分程度を予定しています．ではまた．