複雑領域上のポテンシャル論

— 解析的性質と幾何的性質 —

相川 弘明

日本数学会 特別講演
慶応大学
2010 年 3 月 24 日

Contents

参考文献

1. 調和関数と Martin 境界

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ の領域 D 上で 2 回微分可能な関数 u が Laplace 方程式

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)u = 0$$

を満たすとき, u を D 上の調和関数という.

- ► $B(x, r)$: 中心が x, 半径 r の開球.
- ► $S(x, r)$: 中心が x, 半径 r の球面.
- ► 一般に曲面上の面積要素を $d\sigma$.

正調和関数を詳しく調べよう. まったく一般の領域に対してその上の正調和関数全体を Martin 境界という理想境界によってとらえることができる. そのために Green 関数 $G(x, y)$ を導入する.

定義 1.1 (Green (1828))

$G(x,y)$ が D の Green 関数とは $x \in D$ と $y \in D$ の関数であって, 任意の $y \in D$ を固定したとき, 次の条件をみたす時をいう.

(i) $G(\cdot,y)$ は $D \setminus \{y\}$ で調和.

(ii) $G(\cdot,y) - \phi_y(x)$ は D 上調和に拡張される. ただし ϕ_y は y を極にもつ基本調和関数:

$$\phi_y(x) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{|x-y|} & (n=2), \\ |x-y|^{2-n} & (n \geq 3). \end{cases}$$

(iii) ∂D 上 $G(\cdot,y) = 0$.

領域 D が滑らかならば, D 上の調和関数で D の閉包まで連続なものは Green 関数の法線微分を用いた Poisson 積分で表される.

定理 1.2 (Poisson (1823, published 1827))

D を滑らかな有界領域とする. G を D の Green 関数とし, $x \in D$ と $y \in \partial D$ に対し $P(x,y) = -\dfrac{1}{e_n}\dfrac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)$ とおき, D の Poisson 核という. ただし, $e_2 = 2\pi$ で, $n \geq 3$ のとき $e_n = (n-2)\sigma_n$ である. ここに, σ_n は単位球面の表面積である. h を D 上の調和関数で $\overline{D}$ まで連続なものとすると

$$h(x) = \int_{\partial D} P(x,y)h(y)d\sigma(y) \quad (x \in D).$$

しかし, 複雑な領域に対してはそう簡単ではない.

- Lipschitz 領域 $\Longrightarrow$ 角 $\Longrightarrow$ 法線微分?
- フラクタル領域 $\Longrightarrow$ 境界次元 $> n-1$ $\Longrightarrow$ 面積分?

Martin (1941) は「 Green 関数が存在」 $\Longrightarrow$ Martin 境界 (理想境界).

D が滑らかならば $-\dfrac{\partial}{\partial n_y} G(x,y) \approx \dfrac{G(x,y)}{G(x_0,y)}$ に注意.

- $\dfrac{G(x,\cdot)}{G(x_0,\cdot)}$ を連続に拡張，最小理想境界 Δ と拡張 $K(x,\cdot)$.
- 積分表示： $h(x) = \displaystyle\int_\Delta K(x,y)d\mu_h(y).$
- Δ を Martin 境界.
- $K(x,y)$ を Martin 核. $K(\cdot,y)$ は D 上の正調和関数で $K(x_0,y)=1$.
- $K(\cdot,y)$ が極小. 極小 Martin 境界 Δ_1.
- 非極小 Martin 境界 Δ_0.

Poisson 積分表示 $\Longrightarrow$ Martin 積分表示.

定理 1.3 (Martin (1941))

D 上の正調和関数 h に対し，　Δ_1 上の測度 μ_h が一意的に存在して

$$h(x) = \int_{\Delta_1} K(x,y)d\mu_h(y).$$

Martin の定理は一般的で美しいが，具体的な領域の　　Martin 境界はどうなっているかは別の問題である．

問題

与えられた領域に対して　Martin 境界は位相境界と一致するか　？
$\Delta = \Delta_1 = \partial D$ となる条件は何か　？

D が滑らか $\Longrightarrow$

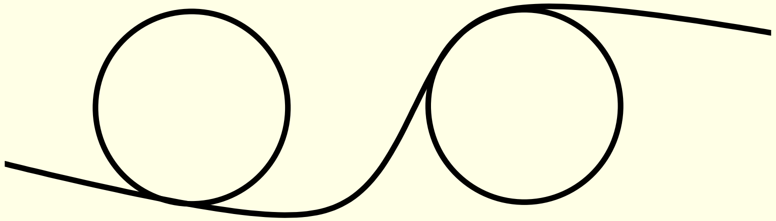
- $G(x_0, y) \approx \delta_D(y) = \mathbf{dist}(y, \partial D)$.
- Martin 核 $K(x, y) = P(x, y) \times$ 正関数.
- Martin の積分表示と Poisson 積分表示は同じ.
- $\Delta = \Delta_1 = \partial D$.

D が一般 $\Longrightarrow$

- $\Delta = \Delta_1 = \partial D$?
- 一般領域と滑らかな領域の間の種々の興味深い領域のクラス.
- Martin 境界の具体的な構造
- 領域が一般 $\Longrightarrow$ 情報は粗い.

2. Carleson 評価と境界 Harnack 原理

- 滑らかな領域 $C^{2,\alpha}$-領域 (Gilbarg & Trudinger (2001))
- 各境界点に対してそこで接する半径一定の球が領域の内側にとれる 内部球条件



- 外側に取れるとき 外部球条件
- 内部球条件と外部球条件の両方：球条件, $C^{1,1}$-領域 (Aikawa, et al. (2007))
- 球条件 $\Longrightarrow$ 境界のある部分で $u = 0$ となる正調和関数 u はその近くで $u(x) \approx \delta_D(x)$.
- $C^{1,\alpha}$-領域 (Widman (1967))

問題は領域が滑らかでなくなったときに起こってくる.

Lipschitz 領域.

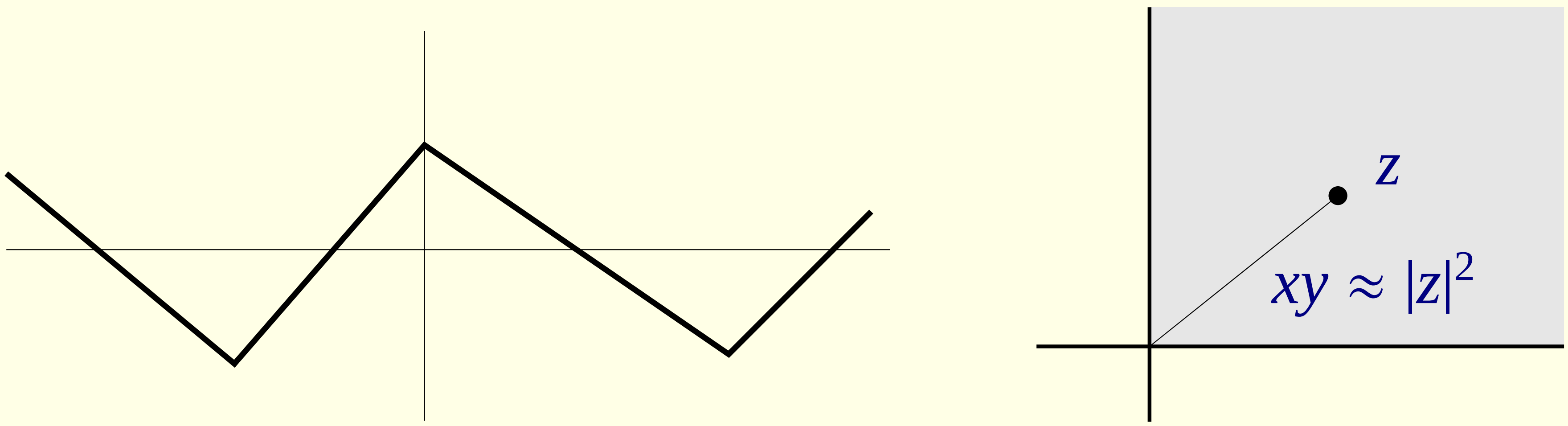
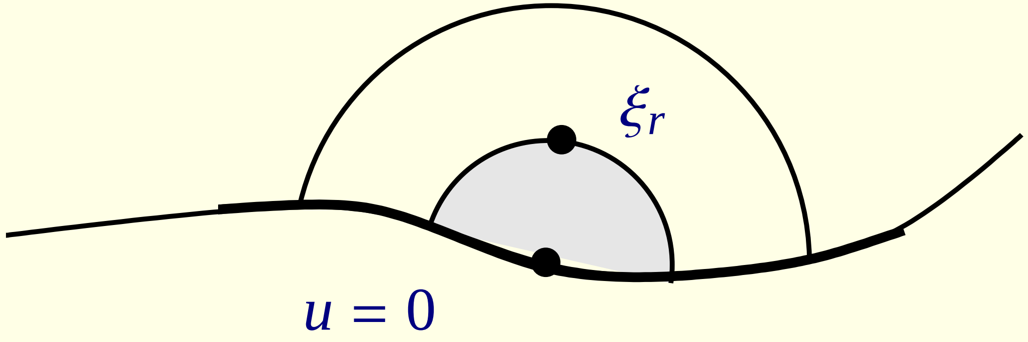


図 1. Lipschitz 領域. 調和関数の消え方.

このような困難を乗り越えて, Carleson (1962) は(一様) Carleson 評価を導き, 局所的 Fatou の定理を証明した.

定義 2.1 (Carleson 評価 Carleson (1962))

D を Lipschitz 領域とする. $\xi \in \partial D$ かつ $r > 0$ を小さい正の数とする. $\xi_r \in S(\xi, r) \cap D$ を $\delta_D(\xi_r) \approx r$ となる点とする. この ξ_r のように ξ からの距離と, 境界 ∂D からの距離が比較可能な点を 非接点という. このとき, u が D で正調和で, $\partial D \cap B(\xi, Cr)$ で $u = 0$ ならば

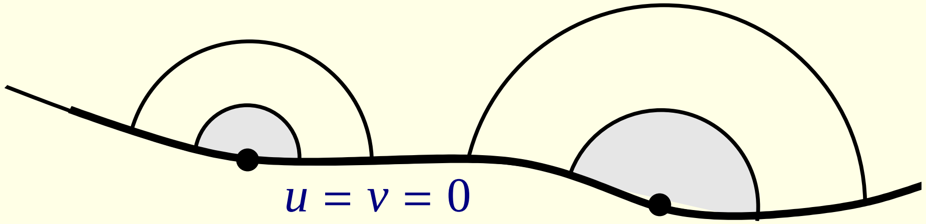


$$u(x) \le Cu(\xi_r) \quad (x \in D \cap B(\xi, r)).$$

Carleson 評価は 1 つの正調和関数の境界増大度を非接点からコントロールするが, 境界 Harnack 原理は 2 つの正調和関数を比較する.

定義 2.2 (一様境界 Harnack 原理)

$\xi \in \partial D$ かつ $r > 0$ を小さい正の数とする. u, v が領域 $D \cap B(\xi, Cr)$ で正調和で $\partial D \cap B(\xi, Cr)$ で $u = v = 0$ ならば



$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)} \le C \quad (x, y \in D \cap B(\xi, r)).$$

ただし $C > 1$ は ξ, r, u, v によらない.

定理 2.3

Lipschitz 領域では一様境界 Harnack 原理がなりたつ.

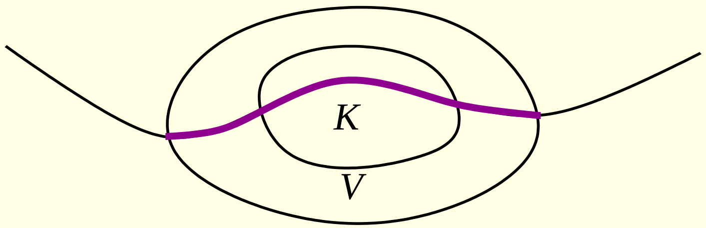
- Carleson の着眼点． Lipschitz 領域の境界点 ξ を頂点とする開きと大きさが一定の錐が領域の内側と外側に取れること（内部および外部錐条件）
- Hunt & Wheeden (1970) は Carleson の方法を Lipschitz 領域に適用し， Martin 境界が位相境界と一致することを示した.
- Kemper (1972) は Lipschitz 領域に対する境界 Harnack 原理をはっきりと定式化した. 証明にはギャップ.
- Lipschitz 領域に対する境界 Harnack 原理. Ancona (1978), Dahlberg (1977), Wu (1978)

注意 2.4

Carleson 評価と境界 Harnack 原理は非常に関係が深く, しばしば混同されてきた. しかし, 精密な定式化を行うと,
Carleson 評価と境界 Harnack 原理は同値 (Aikawa (2008)).

(V, K): $V \subset \mathbb{R}^n$ 有界開集合, $K \subset \mathbb{R}^n$ コンパクト s.t.

(2.1) $$K \subset V,\ K \cap D \neq \emptyset,\quad K \cap \partial D \neq \emptyset.$$



定義 2.5

領域Dが大域的境界 Harnack 原理をみたす とは (2.1) をみたす任意の $^{\forall}(V, K)$ に対して以下の性質を持つ定数 $^{\exists}C_1$ (D, V, K による)が存在することである.

- u と v は D 上の正優調和関数,
- u と v は $V \cap D$ で有界調和,
- $u = v = 0$ on $V \cap \partial D$,

$\Longrightarrow$

$$\frac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} \le C_1 \quad \text{for } x, y \in K \cap D. \tag{2.2}$$

定義 2.6

領域Dが大域的 Carleson 評価をみたす とは (2.1) をみたす任意の ${}^{\forall}(V, K)$ および $x_0 \in K \cap D$ に対して以下の性質を持つ定数 ${}^{\exists}C_2$ (D, V, K, x_0 による)が存在することである.

- u は D 上の正優調和関数,
- u は $V \cap D$ で有界調和,
- $u = 0$ on $V \cap \partial D$,

$\Longrightarrow$

$$u(x) \le C_2 u(x_0) \quad \text{for } x \in K \cap D. \tag{2.3}$$

定理 2.7

任意の領域に対して

大域的境界 Harnack 原理 $\Longleftrightarrow$ 大域的 Carleson 評価

注意 2.8

上の結果の局所的 (一様的) な version もある (Aikawa (2008)).

Martin 境界の決定には一様境界 Harnack 原理が重要である.

定理 2.9

一様境界 Harnack 原理が成立すれば $\Delta = \Delta_1 = \partial D$.

注意 2.10

境界 Harnack 原理は領域 D の幾何学的形状に大きく左右される.

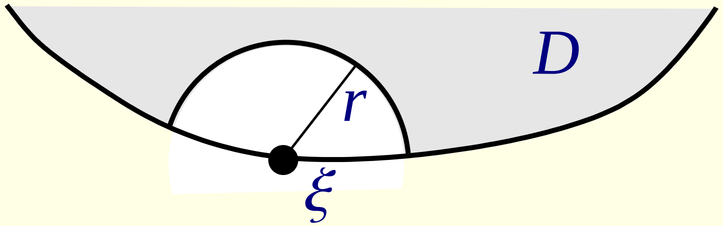
定義 2.11 (ξ における核関数, $\mathcal{H}_\xi$)

境界点 $\xi \in \partial D$ を一つ固定する.

- D 上の正調和関数 h, $h = 0$ on ∂D.
- 任意の $r > 0$ に対して $D \setminus B(\xi, r)$ で有界.
- $h(x_0) = 1$.

定理 2.9 の証明. 境界点 $\xi \in \partial D$ を一つ固定する.

- 一様境界 Harnack 原理から $C^{-1} \le \dfrac{u}{v} \le C \ (u, v \in \mathcal{H}_\xi)$.



- $c = \sup\limits_{\substack{u,v \in \mathcal{H}_\xi \\ x \in D}} \dfrac{u(x)}{v(x)}$ とおくと　$1 \leq c < \infty$.
- $c = 1$ を矛盾によって示す.　$c > 1$ と仮定する.
- 任意に $u,\ v \in \mathcal{H}_\xi$ をとると　$v_1 = (cv - u)/(c-1) \in \mathcal{H}_\xi$.
- $u \leq cv_1 = c(cv - u)/(c-1)$.
- $(2c-1)u \leq c^2 v$ となるが, これは

$$c = \sup_{\substack{u,v \in \mathcal{H}_\xi \\ x \in D}} \frac{u(x)}{v(x)} \leq \frac{c^2}{2c-1} < c \quad \text{矛盾.}$$

- $c = 1$ であり　$\mathcal{H}_\xi$ は 1 点からなる.　$u \in \mathcal{H}_\xi$ は極小である.

□

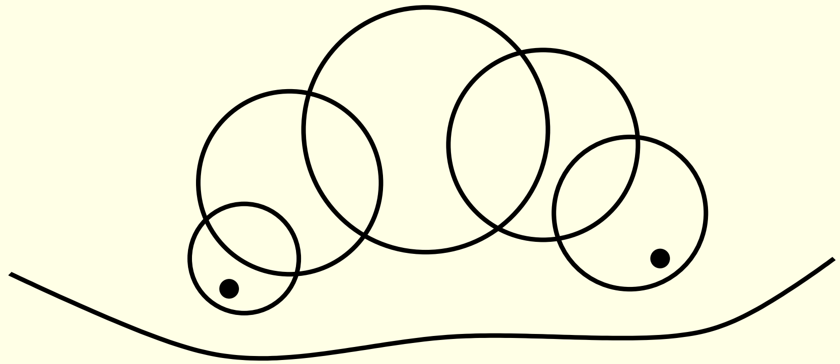
注意 2.12

- 境界で $u = 0$ とは？
- D は Dirichlet 問題に対して非正則かもしれない.
- 連続的に境界で $u = 0$ と仮定できない.
- u は有界であって「境界上の極集合を除いて $u = 0$」 $u = 0$ q.e. (quasi everywhere)
- 極集合とはその上で $+\infty$ となる優調和関数が存在するような小さな集合.
- 極集合の Hausdorff 次元は $n-2$ であり (Armitage & Gardiner (2001, Theorem 5.9.6)), その $n-1$ 次元 Hausdorff 測度や Lebesuge 測度は 0.

3. 様々な複雑領域

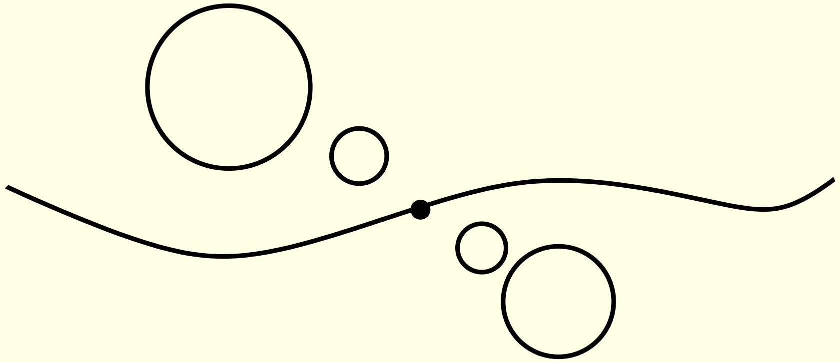
3.1. NTA 領域. 領域 D 内の球の列 $\{B(x_j, \frac{1}{2}\delta_D(x_j))\}_{j=1}^N$ が順番に共通部分を持ち， $x \in B(x_1, \frac{1}{2}\delta_D(x_1))$ かつ $y \in B(x_N, \frac{1}{2}\delta_D(x_N))$ となっているとき， x と y を結ぶ長さ N の Harnack 鎖という.

次元にのみ依存する定数 $C > 1$ で以下をみたすものがある. h を D 内の正調和関数とする. 2 点 x と y が長さ N の Harnack 鎖で結ばれるならば, $h(x)/h(y) \le C^N$ となる.

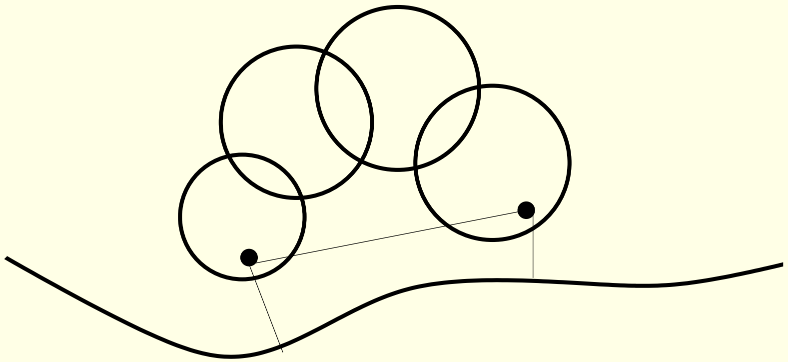


Jerison & Kenig (1982) は Lipschitz 領域を一般化した NTA 領域 (Non-Tangentially Accesible domain) を $C > 1$ と $r_0 > 0$ があって, 以下の 3 条件をみたすものと定義した.

- **Corkscrew 条件.** 任意の境界点 $\xi \in \partial D$ と $0 < r < r_0$ に対し $D \cap B(\xi, r)$ は半径 r/C の球を含む.



- **外部 corkscrew 条件.** 任意の境界点 $\xi \in \partial D$ と $0 < r < r_0$ に対し $B(\xi, r) \setminus D$ は半径 r/C の球を含む.
- **Harnack 鎖条件.** 領域内の任意の 2 点 x, y の距離がそれぞれの点から境界までの距離と比較可能であるとき, x と y は長さが一定の Harnack 鎖で結べる.



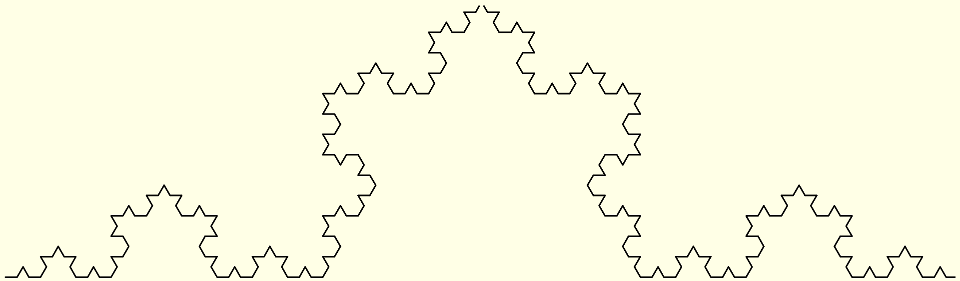


図 2. Snow flake (NTA 領域の例).

注意 **3.1**

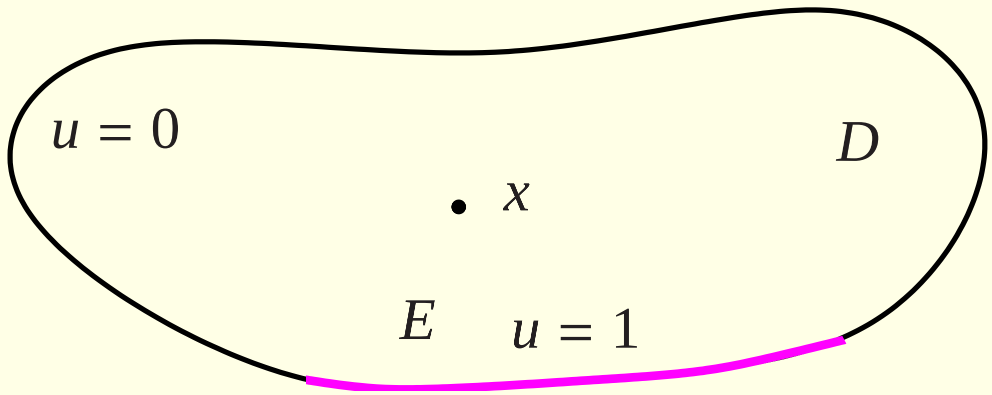
NTA 領域は Lipschitz 領域に比べて遥かに複雑になりうる.

NTA の仮定の下では Carleson 以来の方法をほぼそのまま使える.

定理 3.2

NTA 領域に対しては一様境界　Harnack 原理が成立し，$\Delta = \Delta_1 = \partial D$ である.

$\omega(x; E, D)$ を集合 E の開集合 D に対する調和測度の　x における値とする.

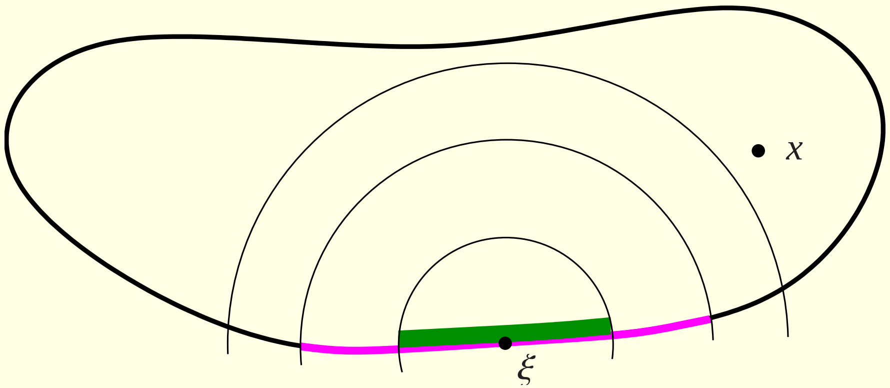


定義 3.3 (調和測度の 2 倍条件)

定数 $C_3 > 2$ が存在して $\xi \in \partial D$ かつ $R > 0$ が十分小ならば

$$\omega(x; B(\xi, 2R) \cap \partial D, D) \le C\omega(x; B(\xi, R) \cap \partial D, D) \quad \text{for } x \in D \setminus B(\xi, C_3 R)$$

となっているとき, 調和測度は 強 2 倍条件をみたすという. 上の不等式が固定した一点 $x = x_0$ についてのみ成立するとき調和測度は 2 倍条件をみたすという.



定理 3.4 (Jerison & Kenig (1982))
NTA 領域の調和測度は 強 2 倍条件をみたす.

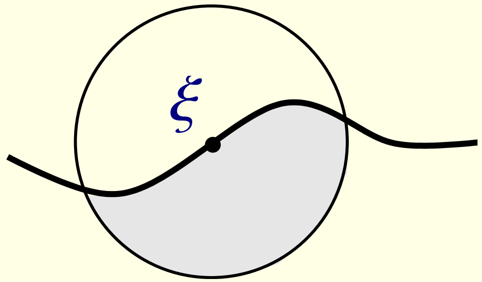
NTA 領域の条件を見れば, Corkscrew 条件と Harnack 鎖条件は領域内部の条件であり, 外部 Corkscrew 条件は外部の条件である.

3.2. 容量密度条件. 外部条件は次のように一般化される. Green 関数を持つ開集合 U 上の Green 容量を $\mathbf{Cap}_U(E)$ で表す.

定義 3.5 (容量密度条件)

D が容量密度条件 (Capacity density condition), 略して CDC, を満たすとは, 正の定数 λ と r_0 があって, すべての $\xi \in \partial D$ と $0 < r < r_0$ に対して

$$\frac{\mathbf{Cap}_{B(\xi,2r)}(B(\xi,r) \setminus D)}{\mathbf{Cap}_{B(\xi,2r)}(B(\xi,r))} \geq \lambda.$$



注意 3.6

体積密度条件: $\dfrac{|B(\xi,r) \setminus D|}{|B(\xi,r)|} \geq C$ は CDC の十分条件. 外部錐条件をみたす領域は CDC をみたす.

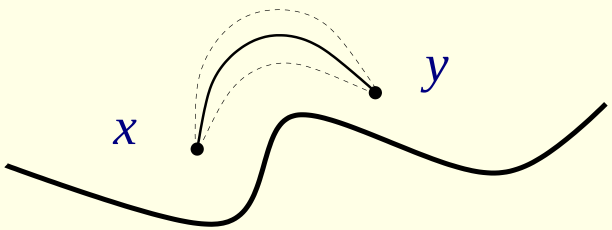
3.3. 一様領域. NTA 領域の Corkscrew 条件と Harnack 鎖条件のみをみたす領域を一様領域という. 別の言葉では

定義 3.7 (一様領域)

D が一様領域とは D 内の任意の 2 点 x, y に対して, x と y を結ぶ D 内の曲線 γ で

$$\ell(\gamma) \le C|x-y|,$$

$$\mathbf{min}\{\ell(\gamma(x,z)), \ell(\gamma(z,y))\} \le C\delta_D(z) \quad (z \in \gamma)$$



をみたすものが存在するときをいう. ただし $\ell(\gamma)$ は曲線 γ の長さを表し, $\gamma(x,z)$ は γ の部分弧で x と z を結ぶものを表す.

定理 3.8 (Aikawa (2001))

一様領域に対しては一様境界 Harnack 原理が成立し, $\Delta = \Delta_1 = \partial D$ である. CDC 不要. 一様領域の調和測度は 2 倍条件をみたすとは限らない.

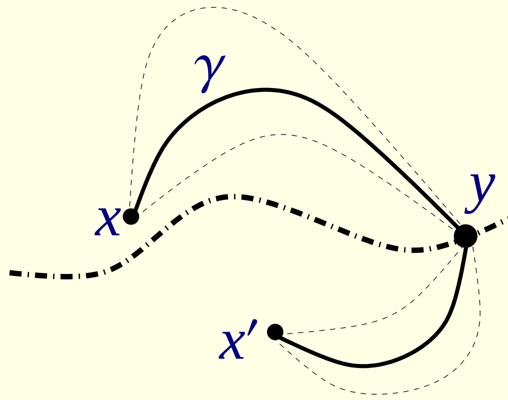
3.4. 半一様領域. 一様領域では任意の $x, y \in D$ が適切な葉巻曲線で結べたが, 少し考察すれば任意の $x, y \in \overline{D}$ も同様の曲線で結べることが分かる. ここで片方の点の位置を制約しよう.

定義 3.9 (半一様領域)

D が半一様領域とは任意の点 $x \in D$ と $y \in \partial D$ に対して， x と y を結ぶ D 内の曲線 γ で

$$\ell(\gamma) \le C|x - y|,$$

$$\min\{\ell(\gamma(x,z)), \ell(\gamma(z,y))\} \le C\delta_D(z) \quad (z \in \gamma)$$



をみたすものが存在するときをいう.

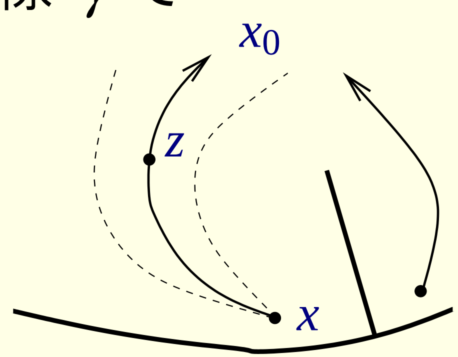
境界が超平面上にある領域を Denjoy 領域という. Denjoy 領域と球との共通部分は典型的な半一様領域である. 半一様領域は調和測度の 2 倍条件で特徴付けられる.

3.5. John 領域. 一様領域では x, y が D 内を自由に動けたが, 一方を $y = x_0$ と固定し, x のみ動かして同じ条件をみたすときに D を John 領域, x_0 を John 中心という. より正確に言うと

定義 3.10 (John 領域)

D 内の任意の点 x に対して, x と x_0 を結ぶ曲線 γ で

$$\delta_D(z) \geq c_J \ell(\gamma(x, z)) \quad (z \in \gamma)$$



をみたすものが存在するとき, この曲線を John 曲線と呼び, D を John 定数 c_J の John 領域という.

- 中心 x_0 は D 内の固定したコンパクト集合に取り替えてもよい.
- John 定数 c_J は $0 < c_J \leq 1$ であって, c_J が 1 に近ければ近いほど領域が滑らかに近いことを表す.
- $^\forall x \in D$ から x_0 に向かう開きが一定の捻れた錐が取れる.
- 弱境界 Harnack 原理が成立し, 極小 Martin 境界点の個数に応用.

定義 3.11

D を $\partial D \neq \emptyset$ となる任意の領域とする. $x, y \in D$ の擬双曲距離を

$$k_D(x, y) = \inf_{\widetilde{xy}} \int_{\widetilde{xy}} \frac{ds}{\delta_D(z(s))}$$

で定義する. 下限は x と y を D 内で結ぶ曲線 $\widetilde{xy}$ に関して取る.

擬双曲距離 $k_D(x,y)$ は x と y を結ぶ最小の Harnack 鎖の長さに比較可能.

定理 3.12

John 領域 D は擬双曲距離条件:

$$k_D(x,x_0) \le C\,\mathbf{log}\,\frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)} + C' \quad (x \in D)$$

をみたす. 特に c_J を D の John 定数とすると, $C = 1/c_J$ と取れる.

John 領域の各境界点の近くを擬双曲距離を用いて詳しく調べることが出来る (Aikawa, et al. (2006, Proposition 2.1)).

補題 3.13 (局所参照点)

D を John 領域とする. $^\forall\xi \in \partial D$ と $R > 0$ 十分小に対して N 個の点 $y_1^R, \dots, y_N^R \in D \cap S(\xi, R)$ s.t.

- N は John 定数にのみに依存.
- $C^{-1}R \le \delta_D(y_i^R) \le R$.
- $\displaystyle\min_{i=1,\dots,N}\{k_{D_R}(x, y_i^R)\} \le C \log\frac{R}{\delta_D(x)} + C$ for $x \in D \cap B(\xi, R/2)$, ただし $D_R = D \cap B(\xi, 8R)$.
- $^\forall x \in D \cap B(\xi, R/2)$ は $^\exists y_i^R$ に D_R 内の曲線 γ で結べる. ただし

$$\ell(\gamma(x, z)) \le C\delta_D(z) \quad \text{for all } z \in \gamma.$$

$y_1^R, \dots, y_N^R$ を位数 N の局所参照点系という.

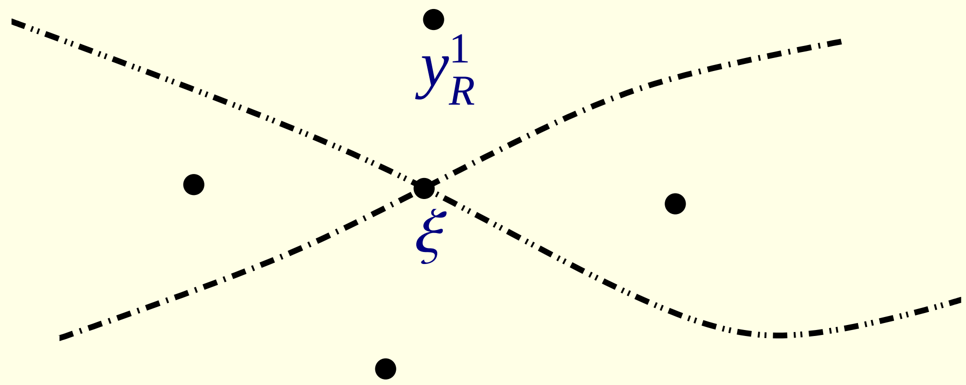


図 3. 局所参照点.

John 領域に対しては　弱境界 Harnack 原理が成り立つ.

定理 3.14 (Aikawa et al. (2006), Ancona (2007))

$\xi \in \partial D$ とする. $R > 0$ 小に対して $y_1^R, \dots, y_N^R$ を位数 N の局所参照点とする. このとき任意の核関数 $h_0, h_1, \dots, h_N \in \mathcal{H}_\xi$ は

$$h_0(x) \le C \sum_{i=1}^{N} \frac{h_0(y_R^i)}{h_i(y_R^i)} h_i(x) \quad (x \in D \setminus B(\xi, CR))$$

をみたす.

- $\mathcal{H}_\xi$ の次元は N 以下.
- ξ に対応する極小 Martin 境界点の数は N 以下.
- $c_J > \sqrt{3}/2$ ならば $N = 2$. 各位相境界点上の極小 Martin 境界点の数は 2 個以下.
- 定数 $\sqrt{3}/2$ は最良. 次元によらない.

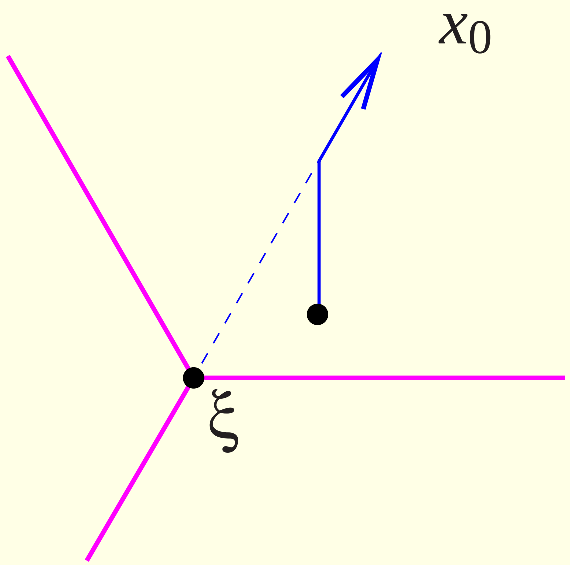


図 4. 定数 $\sqrt{3}/2$ は最良.

4. 解析的性質から幾何的性質

「幾何的性質 $\Rightarrow$ 解析的性質」 vs「解析的性質 $\Rightarrow$ 幾何的性質」
(Aikawa (2004), Aikawa & Hirata (2008))

定理 4.1 (容量密度条件 CDC の調和測度による特徴付け)

CDC $\iff$ ${}^{\exists}C > 0$, $0 < {}^{\exists}\beta \le 1$ s.t. ${}^{\forall}\xi \in \partial D$ と十分小さい ${}^{\forall}r > 0$

(4.1) $\omega(x; D\cap S(\xi, r), D\cap B(\xi, r)) \le C\Big(\dfrac{\delta_D(x)}{r}\Big)^{\beta} \quad (x \in D\cap B(\xi, r/2)).$

(4.1) の逆向きの不等式が John 領域を特徴付ける.

定理 4.2 (John 領域の特徴付け)

D を CDC をみたす領域とする. このとき定数 $^{\exists}C > 0$ と $^{\exists}\alpha > 0$ s.t. $^{\forall}\xi \in \partial D$ と十分小さい $^{\forall}r > 0$

(4.2) $\omega(x; D \cap S(\xi, r), D \cap B(\xi, r)) \geq C\left(\dfrac{\delta_D(x)}{r}\right)^{\alpha} \quad (x \in D \cap B(\xi, r/2))$

$\Longrightarrow$ D は John 領域.

定理 4.3 (一様領域の特徴付け)

D を CDC をみたす John 領域とする. このとき

D は一様領域 $\Longleftrightarrow$ 一様境界 Harnack 原理が成り立つ.

定理 4.4 (半一様領域の特徴付け)

D を CDC をみたす John 領域とする. このとき

D は半一様領域 $\Longleftrightarrow$ 調和測度は強 2 倍条件をみたす.

注意 4.5

調和測度の 2 倍条件は $\mathbb{R}^2$ で多くの研究がなされてきた.

- 単連結領域 D が NTA $\iff$ D の調和測度と $\overline{D}^c$ の調和測度がどちらも 2 倍条件をみたす (Jerison & Kenig (1982, Theorem 2.7)).
- Kim & Langmeyer (1998) は片側条件を与えた.
  Jordan 領域が John 領域 $\iff$ D の調和測度は 2 倍条件をみたす.
- Balogh & Volberg (1996) は (3.3) に似た 2 倍条件を内部一様領域に示した.
- 以上の議論はすべて複素解析による. 高次元化は簡単でない.

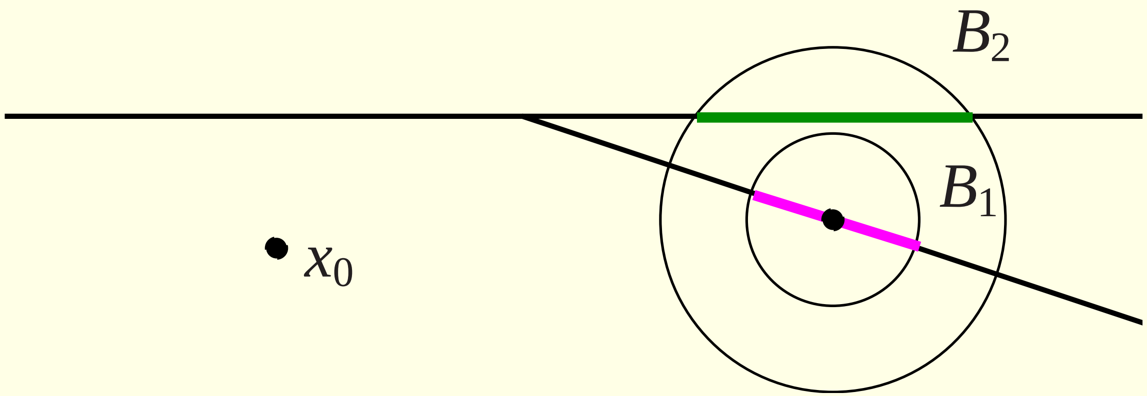
調和測度の 2 倍条件と半一様領域がどうして関係するのかは, Balogh & Volberg (1996) の反例から理解できる.

Let $D = B(0,2) \setminus ([-1,1] \bigcup L_\theta)$ with $L_\theta = \{te^{-i\theta} : 0 \le t \le 1\}$, $0 < \theta < \pi/2$.
If $B_1 = B(te^{-i\theta}, ct)$, $\quad B_2 = B(te^{-i\theta}, 2ct)$ with $\frac{1}{2}\,\mathbf{sin}\,\theta < c < \mathbf{sin}\,\theta$, then

$$B_1 \cap [-1,1] = \emptyset,\ B_2 \cap [-1,1] \neq \emptyset.$$

As $t \to 0$, $\omega(x_0; B_1 \cap \partial D, D) \approx t^{\pi/(\pi-\theta)}$, $\omega(x_0; B_2 \cap \partial D, D) \approx t$, and hence

$$\frac{\omega(x_0; B_2 \cap \partial D, D)}{\omega(x_0; B_1 \cap \partial D, D)} \to \infty.$$ 調和測度の 2 倍条件不成立.



参 考 文 献

[1] Aikawa, H. (2001). 'Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain'. J. Math. Soc. Japan **53** (1): 119–145. [30]

[2] Aikawa, H. (2004). 'Potential-theoretic characterizations of nonsmooth domains'. Bull. London Math. Soc. **36** (4): 469–482. [39]

[3] Aikawa, H. (2008). 'Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate'. Math. Scand. **103** (1): 61–76. [15, 17]

[4] Aikawa, H., & Hirata, K. (2008). 'Doubling conditions for harmonic measure in John domains'. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2): 429–445. [39]

[5] Aikawa, H., Hirata, K., & Lundh, T. (2006). 'Martin boundary points of a John domain and unions of convex sets'. J. Math. Soc. Japan **58** (1): 247–274. [34, 37]

[6] Aikawa, H., Kilpeläinen, T., Shanmugalingam, N., & Zhong, X. (2007). 'Boundary Harnack principle for p-harmonic functions in smooth Euclidean domains'. Potential Anal. **26** (3): 281–301. [10]

[7] Ancona, A. (1978). 'Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien'. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (4): 169–213. [14]

[8] Ancona, A. (2007). 'Sur la théorie du potentiel dans les domaines de John'. Publ. Mat. **51** (2): 345–396. [37]

[9] Armitage, D. H., & Gardiner, S. J. (2001). Classical potential theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London Ltd., London. [21]

[10] Balogh, Z., & Volberg, A. (1996). 'Boundary Harnack principle for separated semihyperbolic repellers, harmonic measure applications'. Rev. Mat. Iberoamericana **12** (2): 299–336. [42]

[11] Carleson, L. (1962). 'On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables'. Ark. Mat. **4**: 393–399. [11, 12]

[12] Dahlberg, B. E. J. (1977). 'Estimates of harmonic measure'. Arch. Rational Mech. Anal. **65** (3): 275–288. [14]

[13] Gilbarg, D., & Trudinger, N. S. (2001). Elliptic partial differential equations of second order. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Reprint of the 1998 edition. [10]

[14] Green, G. (1828). Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Nottingham. [5]

[15] Hunt, R. A., & Wheeden, R. L. (1970). 'Positive harmonic functions on Lipschitz domains'. Trans. Amer. Math. Soc. **147**: 507–527. [14]

[16] Jerison, D. S., & Kenig, C. E. (1982). 'Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains'. Adv. in Math. **46** (1): 80–147. [22, 27, 42]

[17] Kemper, J. T. (1972). 'A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities'. Comm. Pure Appl. Math. **25**: 247–255. [14]

[18] Kim, K., & Langmeyer, N. (1998). 'Harmonic measure and hyperbolic distance in John disks'. Math. Scand. **83** (2): 283–299. [42]

[19] Martin, R. S. (1941). ‘Minimal positive harmonic functions’. Trans. Amer. Math. Soc. **49**: 137–172. [6, 8]

[20] Poisson, S. D. (1823, published 1827). ‘Mémoir sur le calcul numérique des integrales définies’. Mémoires de l’acad. Royale des sci. de l’institute de France (iv): 571–602. [6]

[21] Widman, K.-O. (1967). ‘Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations’. Math. Scand. **21**: 17–37 (1968). [10]

[22] Wu, J.-M. G. (1978). ‘Comparisons of kernel functions, boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains’. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (4): 147–167. [14]