境界 Harnack 原理とその応用

1. Introduction

Poisson 積分.

h: $\mathbb{R}^n_+ = \{x_n > 0\}$ 上で正調和ならば

$$h(x) = \alpha x_n + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} P(x,y)d\mu(y),$$

$P(x,y) = c_n \dfrac{x_n}{|x-y|^n}$ (Poisson 核).

Fatou の定理.

$$\exists \operatorname*{nt-lim}_{x\to\xi} h(x) \text{ for a.e. } \xi \in \partial\mathbb{R}^n_+.$$

局所的 Fatou の定理. (Calderón, Carleson)

h: $\mathbb{R}^n_+$ 上で調和, $E \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ で nt-有界ならば

$$\exists \operatorname*{nt-lim}_{x\to\xi} h(x) \text{ for a.e. } \xi \in E.$$

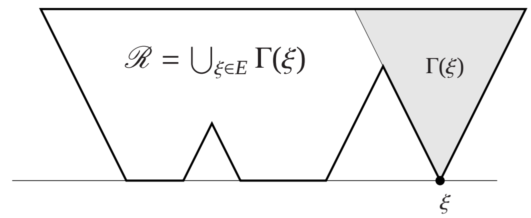


Figure 1. $\mathscr{R}$ は Lipschitz 領域

2. 境界 Harnack 原理

通常の Harnack 原理:

K: D 内のコンパクト集合.

u, v: D 上正調和

$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)} \le A \quad \text{for } x, y \in K.$$

K が境界まで来たら?

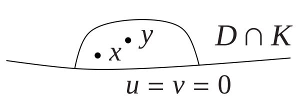
$u = v = 0$ を 'K のつけ根' に課す.

境界 Harnack 原理:

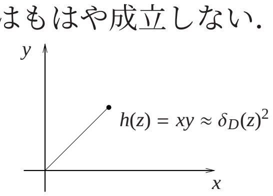
V: $\mathbb{R}^n$ の開集合, $K \subset V$.

u, v: D 上正調和, $\partial D \cap V$ 上 $u = v = 0$

$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)} \le A \quad \text{for } x, y \in D \cap K.$$



領域が滑らかならば $u(x) \approx \delta_D(x)$. しかし, Lipschitz 領域ではもはや成立しない.



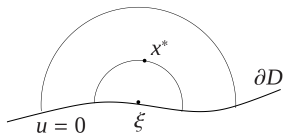
それにもかかわらず, Lipschitz 領域は境界 Harnack 原理をみたす. もっと強くスケール不変な境界 Harnack 原理が成立する.

— 境界 Harnack 原理 の始まり —

3. 境界 Harnack 原理小史

半空間	Carleson 評価	Carleson (61)
滑らか	$u(x) \approx \delta_D(x)$	Widman (67)
Lipschitz	Martin 境界, Fatou 定理	Hunt-Wheeden (70)
Lipschitz	調和解析, $\omega \ll \sigma$	Dahlberg (77)
Lipschitz	一様楕円	Ancona (78)
Lipschitz	Box の調和測度	Wu (78)
Denjoy	Martin 境界	Benedicks (80)
NTA	調和解析	Jerison-Kenig (82)
多様体	特殊な優調和関数	Anderson-Schoen (85)
Lipschitz	3G 不等式	Cranston et al (88)
Hölder, John	確率, 外部条件なし, global	Bass-Burdzy (91)
一様 John	外部条件付き, 内部距離に関し一様	Balogh-Volberg (96)
一様領域	スケール不変, 外部条件なし	HA (01)
内部一様	Gromov, 外部条件付き	Bonk et al (01)
一様 John	内部距離に関し一様, 外部条件なし	HA-Lundh-Mizutani

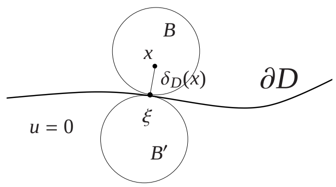
Carleson Estimate



$$u \le Au(x^*).$$

Carleson (61). 内部条件と外部条件の巧みな組み合わせ.

Smooth domain



$$G_B(x) \le u(x) \le G_{\mathbb{R}^n \setminus B'}(x).$$

$$G_B(x) \approx G_{\mathbb{R}^n \setminus B'}(x) \approx \delta_D(x).$$

$C^{1,\alpha}$ 領域でも OK. Widman （67）.

Martin boundary

$$\frac{G(x,y)}{G(x_0,y)} \to K(x,\xi) \quad (y \to \xi \in \Delta)$$

(Martin 核, Martin 境界, minimal 点)
$^\forall h > 0$ harmonic, $^\exists \mu_h$ s.t.

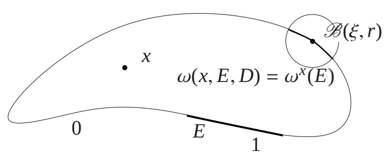
$$h(x) = \int_{\Delta_1} K(x,y)d\mu_h(y)$$

$K(\cdot,\xi) > 0$ 調和, $K(x_0,\xi) = 1$,
$K(\cdot,\xi) = 0$ q.e. on ∂D,
$K(\cdot,\xi)$ は ξ の近傍の外で有界.
(Generalized Poisson Integral Formula)

D: Lipschitz $\implies$ $\Delta = \Delta_1 = \partial D$.
Fatou の定理, 局所的 Fatou の定理成立.
Hunt-Wheeden (70).

Harmonic measure

$$\omega(x, E, D) = \omega^x(E)$$



ω と σ は絶対連続で

$$\frac{d\omega^x}{d\sigma} = \frac{\partial G(x,\cdot)}{\partial n}$$

$\mathscr{B}(\xi, r) = \partial D \cap B(\xi, r)$, surface ball に対して

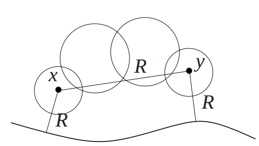
$$\left(\frac{1}{\sigma(\mathscr{B}(\xi,r))}\int_{\mathscr{B}(\xi,r)}\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \le A\frac{1}{\sigma(\mathscr{B}(\xi,r))}\int_{\mathscr{B}(\xi,r)}\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma.$$

Dahlberg (77).

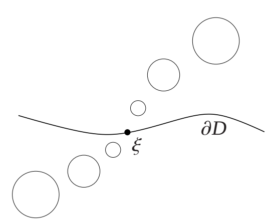
Non Tangentially Accessible domain

Jerison-Kenig (82).

- Harnack chain condition （内）
- Corkscrew condition （内）
- D^c Corkscrew condition （外）



Harnack chain.



Corkscrew.

Quasi-circle は NTA (e.g. Snow Flake).
$\Delta = \Delta_1 = \partial D$.
Fatou の定理, 局所的 Fatou の定理成立.
調和測度と表面積は比べられない. Dahlberg の定理は不成立.

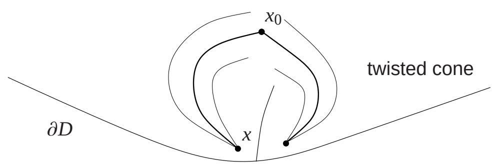
Bass-Burdzy (91)

Hölder 領域や John 領域で global な境界 Harnack 原理.

John 領域． twisted cone condition:

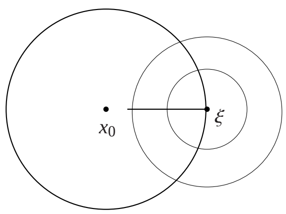
$^\forall x \in D,\ ^\exists \gamma : x \to x_0$ s.t.

$$\delta_D(y) \ge c_J \ell(\gamma(x,y)) \quad \text{for all } y \in \gamma,$$



外部条件なし．スケール不変でない．

$\Delta \ne \partial D$.



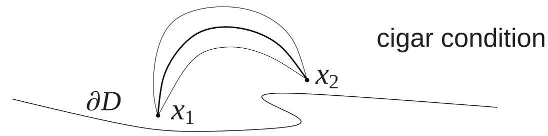
一様領域.

Gehring, Martio, Saravas, Väisälä, Jones

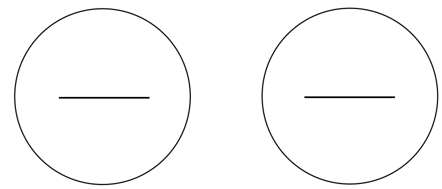
cigar condition:

$^\forall x_1, x_2 \in D,\ ^\exists \gamma : x_1 \to x_2$ s.t.

$$\delta_D(y) \ge \frac{1}{A} \min\{\ell(\gamma(x_1,y)), \ell(\gamma(x_2,y))\},$$
$$\ell(\gamma) \le A|x_1 - x_2|.$$



一様領域の例.



一様領域 $n \ge 3$　　一様 John 領域 $n = 2$

定理 1

一様領域に対してスケール不変な境界 Harnack 原理が成立:

$\xi \in \partial D$, $R > 0$ 小.

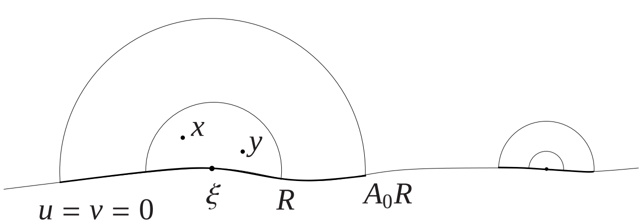
u, v: $D \cap B(\xi, A_0 R)$ で有界，正調和かつ

$u = v = 0$ q.e. on $\partial D \cap B(\xi, A_0 R)$

$\Longrightarrow$

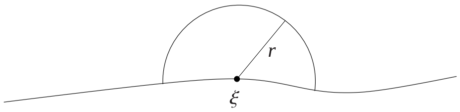
$$\frac{u(x)}{v(x)} \le A_1 \frac{u(y)}{v(y)} \quad \text{for } x, y \in D \cap B(\xi, R).$$

A_0 と A_1 は ξ, R, u, v に無関係.



- $\Delta = \Delta_1 = \partial D$.
- Martin 核は Hölder 連続.
- u と v は非正則点で不連続.
- しかし，比 u/v は境界で消えている所で Hölder 連続.
- Fatou の定理が成立．局所的 Fatou の定理は不成立.
- 外部条件なし．Carleson の方法は使えない.
- 表面球 $\partial D \cap B(\xi, r)$ は polar かもしれない.
- 調和測度は doubling と限らない.
- 調和測度の比として Martin 核は得られない.
- 直接，Green 関数の比を評価する.
- 3G 不等式成立.
- Jones' の幾何学的局所化を避ける.
- (一様)John 領域に拡張できる.

Hölder continuity.



Moser technique:

u, v: $D \cap B(\xi, A_0R)$ で有界，正調和かつ $u = v = 0$ q.e. on $\partial D \cap B(\xi, A_0R)$ とする．

$$M(r) = \sup_{D\cap B(\xi,r)} \frac{u}{v}, \quad m(r) = \inf_{D\cap B(\xi,r)} \frac{u}{v}$$

とおくと，$\operatorname{osc}_{D\cap B(\xi,r)} u/v = M(r) - m(r)$ となる．境界 Harnack 原理より r に無関係な定数 $A_1 >$ があって，

$$m(r) \le M(r) \le A_1 m(r).$$

$M(r)v - u$ と $u - m(r)v$ は $D \cap B(\xi, r)$ 上の正調和関数なので，もう一度境界 Harnack 原理を用いると，

$r' = r/A_0$ に対して

$$\sup_{D\cap B(\xi,r')} \frac{M(r)v - u}{v} \le A_1 \inf_{D\cap B(\xi,r')} \frac{M(r)v - u}{v},$$

$$\sup_{D\cap B(\xi,r')} \frac{u - m(r)v}{v} \le A_1 \inf_{D\cap B(\xi,r')} \frac{u - m(r)v}{v}.$$

よって

$$M(r) - m(r') \le A_1(M(r) - M(r'))$$

$$M(r') - m(r) \le A_1(m(r') - m(r)).$$

辺々加えて

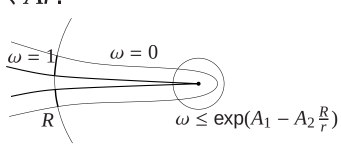
$$M(r') - m(r') \le \frac{A_1 - 1}{A_1 + 1}(M(r) - m(r))$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{osc}_{D\cap B(\xi,r')} \frac{u}{v} \le \left(\frac{A_1 - 1}{A_1 + 1}\right) \operatorname{osc}_{D\cap B(\xi,r)} \frac{u}{v}$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{osc}_{D\cap B(\xi,r)} \frac{u}{v} \le A\left(\frac{r}{R}\right)^{\varepsilon} \operatorname{osc}_{D\cap B(\xi,R)} \frac{u}{v}.$$

4. 証明のスケッチ

Cigar 条件（内部）により $U_r = \{x \in D : \delta_D(x) < r\}$ の厚さは高々 Ar.

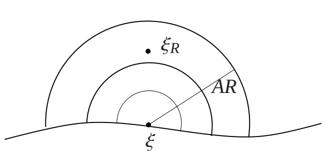


$B(x, 2r) \cap U_r$ 上

$$\omega(\cdot, S(x,R) \cap U_r, B(x,R) \cap U_r) \le \exp(A_1 - A_2\frac{R}{r}).$$

Box 議論 (Bass-Burdzy) の活用．ξ_R: $D \cap S(\xi, 4R)$ 上の非接点．G_R:$D \cap B(\xi, AR)$ の Green 関数．このとき $D \cap B(\xi, R)$ 上

$$\omega(\cdot, D \cap S(\xi, 2R), D \cap B(\xi, 2R)) \le AR^{n-2}G_R(\cdot, \xi_R).$$

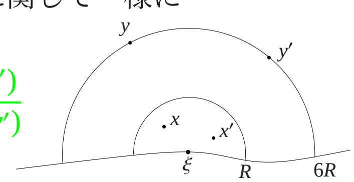


Green 関数に対して，自明な Carleson 評価:

$$G_R(x, y) \le AR^{2-n}$$

$(|x - \xi| \le 2R < 3R \le |y - \xi|)$ が成立． 調和測度と Green 関数の比較から $x, x' \in D \cap B(\xi, R)$ と $y, y' \in D \cap S(\xi, 6R)$ に関して一様に

$$\frac{G_R(x, y)}{G_R(x', y)} \approx \frac{G_R(x, y')}{G_R(x', y')}$$



u: $D \cap B(\xi, AR)$ 上で有界正調和，境界 $\partial D \cap B(\xi, AR)$ で $u = 0$ q.e. は $D \cap B(\xi, 6R)$ 上でポテンシャル表示:

$$u = \int_{D\cap S(\xi,6R)} G_R(\cdot, y)d\mu(y).$$

Green 関数の評価を

$$G_R(x, y) \approx \frac{G_R(x, y')}{G_R(x', y')} G_R(x', y)$$

と書いて積分して

$$u(x) \approx \frac{G_R(x,y')}{G_R(x',y')} \int_{D\cap S(\xi,6R)} G_R(x',y)d\mu(y)$$
$$= \frac{G_R(x,y')}{G_R(x',y')} u(x').$$

v も同様．よって境界 Harnack 原理成立． □

3G 不等式．

4 つの Green 関数の評価式から $n \geq 3$ のとき，3G 不等式:

$$\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)} \leq A(|x-y|^{2-n} + |y-z|^{2-n})$$

を得る．2 次元の時は Bass-Burdzy (95) により任意の有界領域に対して, 右辺は

$$A(1 + \overset{+}{\log}\frac{1}{|x-y|} + \overset{+}{\log}\frac{1}{|y-z|})$$

で置き換えられる．

5. Fatou の定理

定理 2

一様領域に対して

(i) global Fatou 定理は成立．

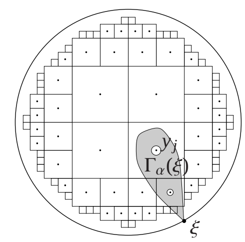
(ii) local Fatou 定理は不成立．

証明． 前半: u が領域全体で正調和

$\Longrightarrow$ Martin 境界の一般論 (Fatou-Naïm-Doob)

$\Longrightarrow$ 非接境界値は存在（境界 Harnack 原理)

後半: $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$: $B(0,1)$ の Whitney 分解，y_j: 中心．$D = B(0,1) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty}\{y_j\}$ は一様領域．



調和関数 u の構成：各 y_j に $-j$ 次の特異性．

各 $\xi \in S(0,1)$ に対し、

開き α が小さい $\Longrightarrow$ $\Gamma_\alpha(\xi)$ 上 u は有界．

開きが大きい $\Longrightarrow$ u が発散する $^\exists$点列 $\subset \Gamma_\alpha(\xi)$.

—調和測度が doubling でないのが原因— □

6. 調和関数の可積分性

D: $\mathbb{R}^n$ 内の有界 C^2-領域ならば

$\mathscr{H}_+(D) \subset \mathscr{L}^p(D)$ （$p < n/(n-1)$ は最良).

☺ Poisson 積分表示, Poisson 核の評価．

「角」の存在 $\Longrightarrow$ 巾の条件 $p < n/(n-1)$ 変化．

例: 2 次元の第 1 象限．$h(z) = xy|z|^{-4}$ は第 1 象限で正調和，-2 次の同次関数．

☹ 0 の近傍で $\mathscr{L}^1$ でない．

D: $\mathbb{R}^n$ 内の有界 k-Lipschitz 領域, i.e., 境界が局所的に $\mathbb{R}^{n-1}$ の k-Lipschitz 関数のグラフ．

定理 3

$^\exists p_k = p(k,n) > 0$ s.t.

$$\mathscr{H}_+(D) \subset \mathscr{L}^p(D) \quad (0 < p < p_k).$$

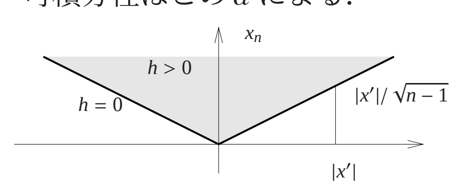
$k \to 0$ のとき，$p_k \to n/(n-1)$,

$k = 1/\sqrt{n-1}$ のとき，$p_k = 1$.

証明． $g(x) = G(x, x_0)$ とおく．k-Lipschitz 性 (内・外錐) より，$0 < {}^\exists\beta < 1 < {}^\exists\alpha$ s.t.

$$A^{-1}\delta_D(x)^\alpha \leq g(x) \leq A\delta_D(x)^\beta.$$

$k \to 0$ のとき，$\alpha \to 1$; $k = 1/\sqrt{n-1}$ のとき，$\alpha = 2$．可積分性はこの α による．



$$h(x) = (n-1)x_n^2 - |x'|^2 \text{ は正調和},$$
$$k = 1/\sqrt{n-1},\ \alpha = 2.$$

$h \in \mathscr{H}_+(D)$ とする．coarea 公式から

$$\int_{\{g(x)<b\}} h(x)g(x)^{\varepsilon-1}|\nabla g(x)|^2 dx$$
$$= \int_0^b t^{\varepsilon-1}dt \int_{\partial D_t} h|\nabla g|d\sigma$$
$$= c_n \frac{b^\varepsilon}{\varepsilon} h(x_0) < \infty.$$

∵ $G_t(\cdot, x_0) = g - t$ は $D_t = \{x : g(x) > t\}$ の Green 関数.

h の重みつき可積分性.

重み $g^{\varepsilon-1}|\nabla g|^2$ の考察.

$|\nabla g(x)| \le Ag(x)/\delta_D(x)$ は容易．ある意味で逆の不等式が必要.

$\{Q_j\}$: D の Whitney 分解，y_j: Q_j の中心.

$\exists y_j^* \in \partial D$ s.t. $\delta_D(y_j) = |y_j - y_j^*|$.

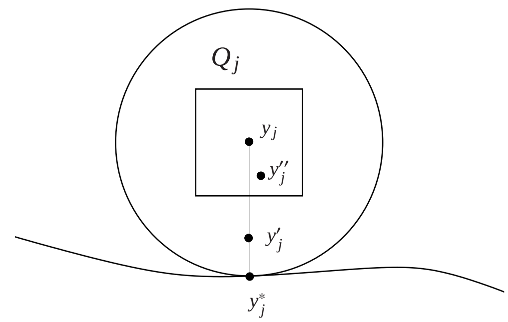
境界 Harnack 原理から $D \cap B(y_j^*, A^{-1}\delta_D(y_j))$ の上で

$$g \le Ag(y_j)\omega(\cdot, D\cap B(y_j^*, \delta_D(y_j)), D\cap S(y_j^*, \delta_D(y_j))).$$

外部錐より調和測度を評価して，

$\exists y_j' \in \overline{y_j y_j^*}$ s.t. $g(y_j') \le \frac{1}{2}g(y_j)$, $\delta_D(y_j') \ge A^{-1}\delta_D(y_j)$.

g は $B(y_j, \delta_D(y_j))$ 上で正調和より，$\exists y_j'' \in Q_j$ s.t. $g(y_j'') \le (1-\eta)g(y_j)$ と段差が出来る.



この y_j'' の存在から $|\nabla g(x)| \le Ag(x)/\delta_D(x)$ のある意味で逆の不等式:

$$\int_{Q_j} |\nabla g|^2 dx \ge A\left(\frac{g(y_j)}{\delta_D(y_j)}\right)^2 |Q_j|.$$

h や g は Harnack 不等式で中心の値に取り替え，最後に $g(x) \ge A\delta_D(x)^\alpha$ を用いると，

$$\int_{Q_j} hg^{\varepsilon-1}|\nabla g|^2 dx \ge Ah(y_j)\delta_D(y_j)^{\alpha(1+\varepsilon)-2}|Q_j|$$
$$\ge Ah(y_j)|Q_j|^{[\alpha(1+\varepsilon)-2+n]/n}.$$

一方，

$$\left(\int_{Q_j} h^p dx\right)^{1/p} \approx h(y_j)|Q_j|^{1/p}.$$

$p < n/(\alpha-2+n) \equiv p_k$ のとき ε を小さく取れば，

$$\left(\int_{Q_j} h^p dx\right)^{1/p} \le A\int_{Q_j} hg^{\varepsilon-1}|\nabla g|^2 dx.$$

この式を加えて定理を得る. □