複雑領域上の正調和関数

相川 弘明

日本数学会 企画特別講演
東京大学
2009 年 3 月 29 日

Contents

1. 調和関数

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) の領域 D 上で 2 回微分可能な関数 u が Laplace 方程式

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)u = 0$$

を満たすとき，u を D 上の調和関数という．

- 微分可能性不要，超関数の意味
- 無限回微分可能，実解析的
- 様々な美しい性質
- 微分を用いずに調和関数を特徴付け（平均値原理）
- ネットワークなどの離散空間上で調和関数

- $B(x,r)$：中心が x，半径 r の開球.
- $S(x,r)$：中心が x，半径 r の球面.
- 一般に曲面上の面積要素を $d\sigma$.

定理 1.1

u が領域 D で調和であることは次の 2 条件と同値である.

(i) u は D で連続である.

(ii) 平均値原理が成立する．すなわち，任意の $x \in D$ と $0 < r < \mathbf{dist}(x, \partial D)$ に対して

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(S(x,r))} \int_{S(x,r)} u(y) d\sigma(y).$$

定義 1.2 (優調和関数)

平均値原理の等式を不等式

$$u(x) \geq \frac{1}{\sigma(S(x,r))} \int_{S(x,r)} u(y) d\sigma(y).$$

に取り替え，連続性を下半連続性に取り替えれば優調和関数を得る．逆向きの不等式と上半連続性を用いれば劣調和関数を得る．

注意 1.3

超関数の意味で $\Delta u \leq 0$ のとき，u の下半連続化は優調和関数となり，$\Delta u \geq 0$ のとき，u の上半連続化は劣調和関数となる．優調和関数や劣調和関数は調和関数に比べて融通が利き，Dirichlet 問題の Perron 解法に欠かせない．

様々な発展：

- 方程式の一般化
- 空間の一般化
- De Giorgi-Nash-Moser の理論

本講演：

- ユークリッド空間内の領域上の調和関数
- 初等的
- 複雑な境界挙動
- 領域が一般になると未解明な問題が数多い.
- 「境界へのアプローチ」による新たなフロンティア

調和関数は正 $\Longrightarrow$ 豊かな議論の展開

2. Martin 境界

まったく一般の領域に対してその上のすべての正調和関数全体をとらえよう．これは Martin 境界という理想境界によって完成される．そのために Green 関数 $G(x,y)$ を導入する．ϕ_y を y を極にもつ基本調和関数：

$$\phi_y(x) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{|x-y|} & (n=2), \\ |x-y|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

とする．

定義 2.1 (Green 1828 [19])

$G(x,y)$ が D の Green 関数とは $x \in D$ と $y \in D$ の関数であって，任意の $y \in D$ を固定したとき，次の条件をみたす時をいう.

(i) $G(\cdot, y)$ は $D \setminus \{y\}$ で調和.

(ii) $G(\cdot, y) - \phi_y(x)$ は D 上調和に拡張される.

(iii) ∂D 上 $G(\cdot, y) = 0$.

領域 D が滑らかならば，D 上の調和関数で D の閉包まで連続なものは Green 関数の法線微分を用いた Poisson 積分で表される.

定義 2.2 (Poisson 1823 [29])

D を滑らかな有界領域とする．G を D の Green 関数とし，$x \in D$ と $y \in \partial D$ に対し $P(x,y) = -\dfrac{1}{e_n}\dfrac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)$ とおき，D の Poisson 核という．ただし，$e_2 = 2\pi$ で，$n \geq 3$ のとき $e_n = (n-2)\sigma_n$ である．ここに，σ_n は単位球面の表面積である．さらに境界上の関数 f に対し

$$P[f](x) = \int_{\partial D} P(x,y) f(y) d\sigma(y)$$

を Poisson 積分という．

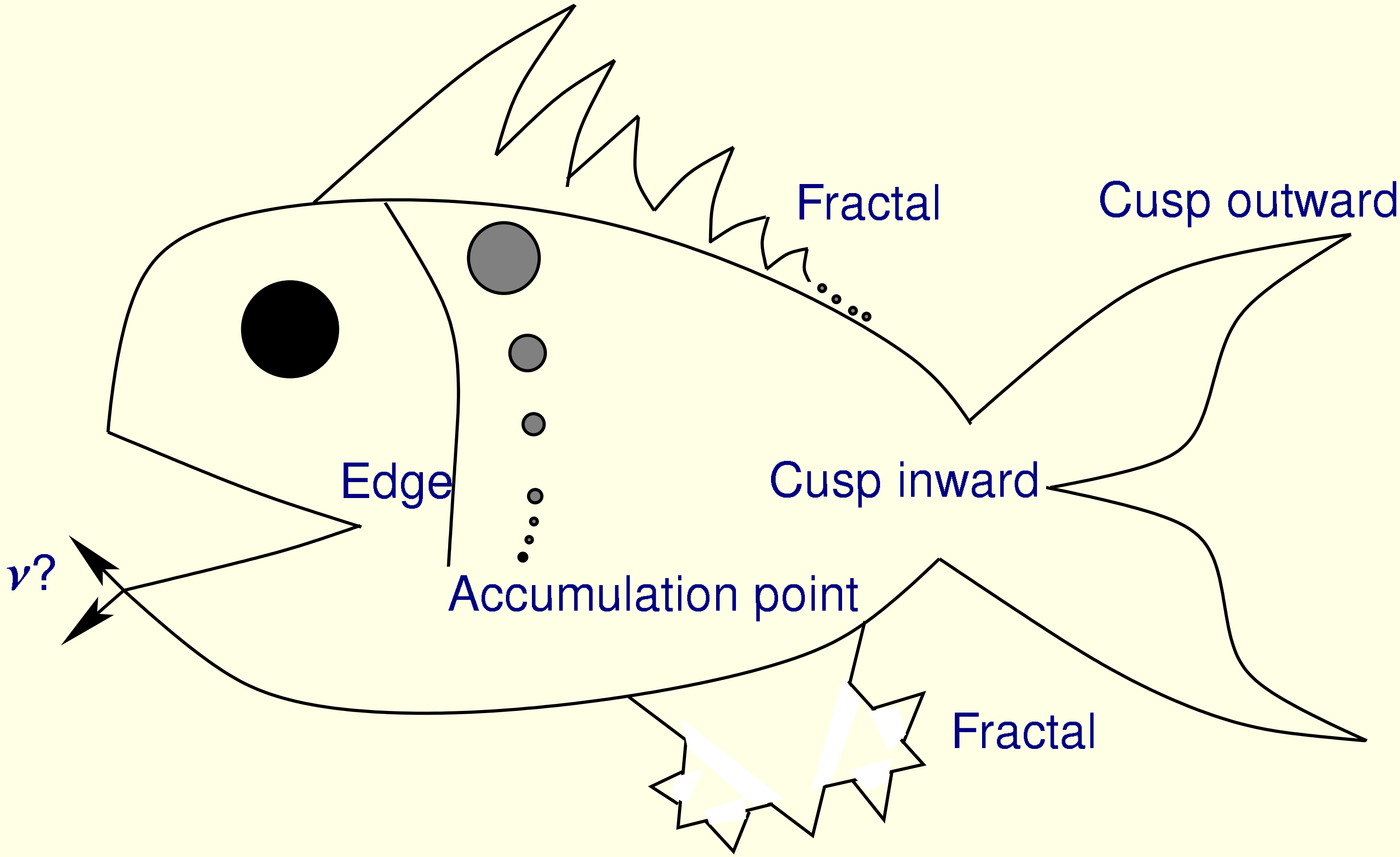
定理 2.3

D を滑らかな有界領域，h を D 上の調和関数で $\overline{D}$ まで連続なものとすると

$$h(x) = P[h](x) = \int_{\partial D} P(x,y)h(y)d\sigma(y) \quad (x \in D).$$

- h が正調和ならば ∂D 上の測度 μ_h が一意的に存在して $h = P[\mu_h]$.
- Green 関数の具体的表現なくても Poisson 積分表示とその評価.
- 正の調和関数境界のほとんどすべての点で非接境界値を持つ（Fatou 1906 [15]）.

しかし，複雑な領域に対してはそう簡単ではない.



Poisson 積分は存在しない.

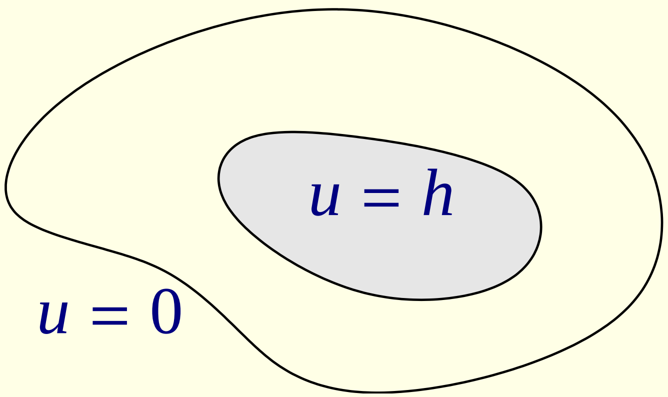
- 角のあるような Lipschitz 領域では法線方向が決まらない点が出てくるから，法線微分をどう考えるか問題.
- フラクタル領域では境界が $n-1$ 次元でなくなってしまうから，面積分をどう理解するかも問題.

Martin (1941) [28] は「Green 関数が存在する」という条件だけをみたす全く一般の領域における積分表示を考え，Martin 境界と呼ばれる理想境界を導入した.

- 一般領域 D を内側から相対コンパクト開集合 D_j の増加列で近似. $D_j \uparrow D$.
- 掃散 $u = \hat{R}_h^{D_j}$ を考える.

すなわち，$\overline{D_j}$ 上では u を h とし，$D \setminus \overline{D_j}$ では u を Dirichlet 問題

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x) &= 0 && (x \in D \setminus \overline{D_j}),\\
u(x) &= h(x) && (x \in \partial D_j),\\
u(x) &= 0 && (x \in \partial D)
\end{aligned}
$$



- u は D 全体で優調和.
- u は $D \setminus \partial D_j$ で調和.
- 境界 ∂D で $u = 0$.
- ∂D_j 上の測度 ν_j があって，$u = G\nu_j$ D 上の Green ポテンシャル.

$x_0 \in D$ を固定．D_j 上では $\hat{R}_h^{D_j} = h$ であるから，積分表示:

$$
h(x) = \int G(x,y)d\nu_j(y) = \int \frac{G(x,y)}{G(x_0,y)} G(x_0,y)d\nu_j(y) \quad x \in D_j.
$$

- 測度 $d\mu_j(y) = G(x_0, y)d\nu_j(y)$.
- $x = x_0$ とすれば $\|\mu_j\| = h(x_0)$ (一定値）.
- $d\mu_j$ の部分列は w^*-収束．その極限を μ_h とすれば,

積分表示：$h(x) = \displaystyle\int \frac{G(x,y)}{G(x_0,y)} d\mu_h(y) \quad (x \in D)$

- しかし，これでは不十分.
- Green 関数の比 $G(x,\cdot)/G(x_0,\cdot)$ が境界まで連続に延びているか？
- 逆に$G(x,\cdot)/G(x_0,\cdot)$ が連続に拡張できるような最小の理想境界 Δ と拡張 $K(x,\cdot)$ を考える.

積分表示：$h(x) = \displaystyle\int_\Delta K(x,y) d\mu_h(y)$.

- Δ を Martin 境界，$K(x, y)$ を Martin 核.
- $K(\cdot, y)$ は D 上の正調和関数で $K(x_0, y) = 1$.
- Martin 核を境界点とみなす.
- この積分表示に現れる測度 μ_h は一意的でない.
- Martin 境界の中で本質的な点，極小 Martin 境界点を考える必要.
- 一般に正調和関数 u が極小とは u 以下の正調和関数が必然的に u の定数倍になってしまうときをいう.
- Martin 核 $K(\cdot, y)$ が極小であるとき y を極小 Martin 境界点といい，その全体を極小 Martin 境界と呼び，Δ_1 で表す.
- 残りの境界を非極小 Martin 境界といい, Δ_0 で表す.
- Poisson 積分表示は次のように一般化.

Martin 積分表示 (1941) [28]

D 上の正調和関数 h に対し，Δ_1 上の測度 μ_h が一意的に存在して

$$h(x) = \int_{\Delta_1} K(x,y)d\mu_h(y).$$

- 具体的な領域の Martin 境界はどうなっているか？
- どう調べるか?

3. 境界 Harnack 原理

D が滑らか

- $G(x_0, y) \approx \delta_D(y) = \mathbf{dist}(y, \partial D)$.
- Martin 核 $K(x, y) = P(x, y) \times$ 正関数.
- Martin の積分表示と Poisson 積分表示は同じ.
- $\Delta = \Delta_1 = \partial D$.

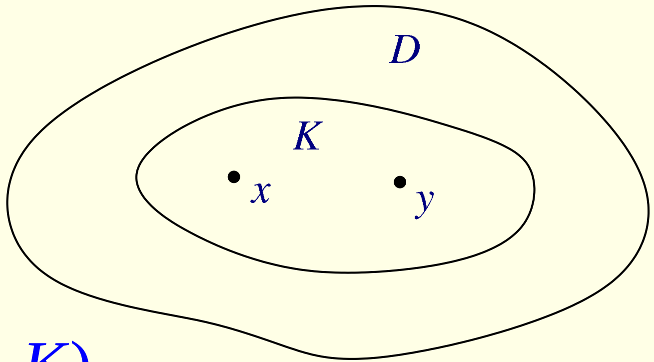
D が一般

- $\Delta = \Delta_1 = \partial D$?
- 一般領域と滑らかな領域の間の種々の興味深い領域のクラス.
- Martin 境界の具体的な構造
- 領域が一般 $\Longrightarrow$ 情報は粗い.

境界 Harnack 原理 v.s. Harnack 原理

定理 3.1 (Harnack 原理 (1886) [20])

K を領域 D 内のコンパクト集合とする.
このとき K と D による定数 $C>1$ が存在して，D 上の任意の正調和関数 u と v に対して



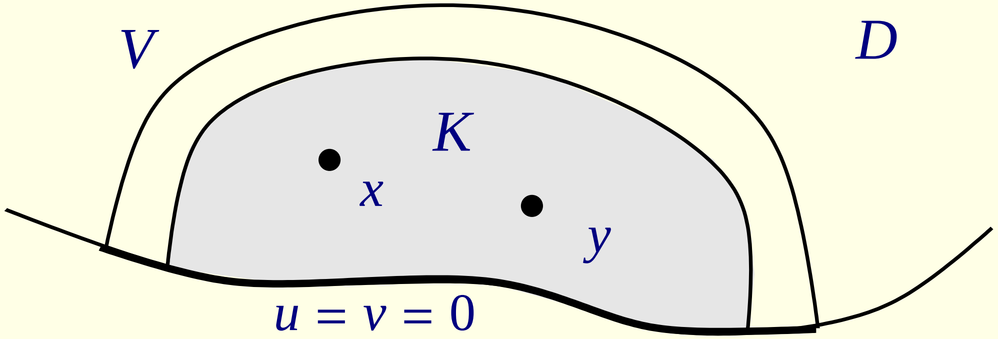
$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)} \le C \quad (x, y \in K).$$

ここで K が D 内のコンパクト集合という条件を外して，境界まで来たらどうなるだろうか? このときは u, v が単に正調和だけでは境界の

影響が出て，比較できなくなってしまう．そこで，その代わりに「K のつけ根」で $u = v = 0$ であると仮定する．

定義 3.2 (境界 Harnack 原理)

K を ∂D と交わるコンパクト集合とし，V を K を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．このとき K と V，D による定数 $C > 1$ が存在して，D 上の任意の正調和関数 u と v で $\partial D \cap V$ 上 $u = v = 0$ となるものに対して



$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)} \leq C \quad (x, y \in D \cap K).$$

注意 3.3

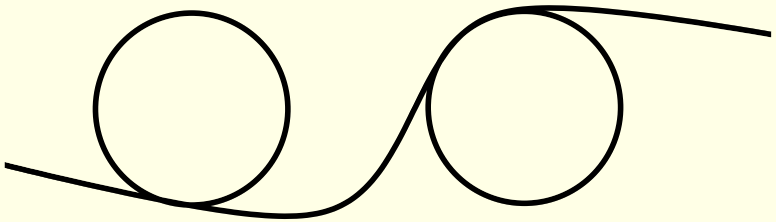
境界 Harnack 原理の成立は領域 D の幾何学的形状に大きく左右される.

- 境界で $u = 0$ とは?
- D は Dirichlet 問題に対して非正則かもしれない.
- 連続的に境界で $u = 0$ と仮定できない.
- u は有界であって,「境界上の極集合を除いて $u = 0$」$u = 0$ q.e. (quasi everywhere)
- 極集合とはその上で $+\infty$ となる優調和関数が存在するような小さな集合.
- 極集合の Hausdorff 次元は $n - 2$ であり ([10, Theorem 5.9.6]), その $n - 1$ 次元 Hausdorff 測度や Lebesuge 測度は 0.

4. 滑らかな領域から Lipschitz 領域，NTA 領域へ

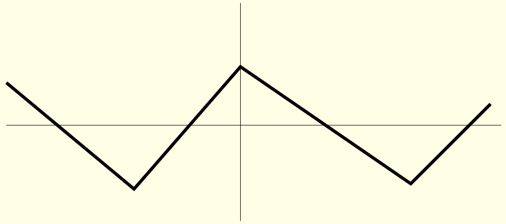
滑らかな領域 $C^{2,\alpha}$-領域 ([18])

- 各境界点に対してそこで接する半径一定の球が領域の内側にとれる内部球条件



- 外側に取れるとき外部球条件
- 内部球条件と外部球条件の両方をみたすとき球条件，$C^{1,1}$-領域 [5]
- 球条件 $\Longrightarrow$ 境界のある部分で $u=0$ となる正調和関数 u はその近くで $u(x)\approx\delta_D(x)$.
- 境界 Harnack 原理（調和関数，p-調和関数）
- $C^{1,\alpha}$-領域 ([33])

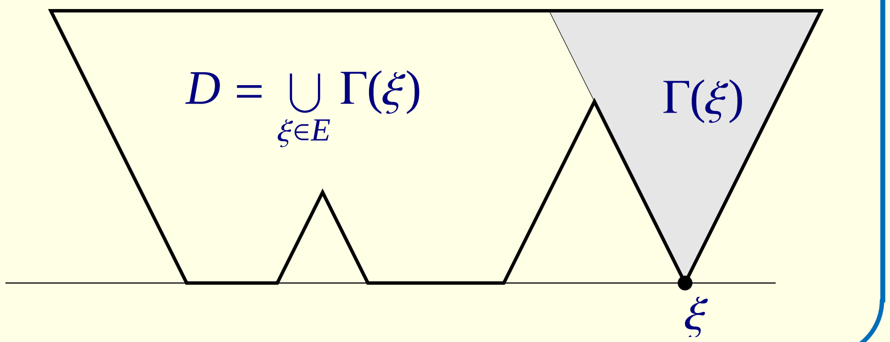
4.1. Lipschitz 領域. 局所的に境界がLipschitz連続関数のグラフで表される領域をLipschitz領域という.



局所的Fatouの定理 $\Longrightarrow$ Lipschitz領域

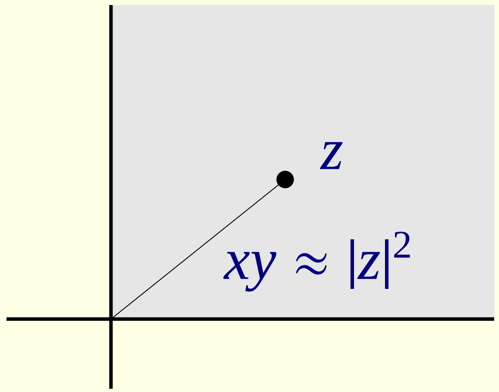
定理 4.1 (局所的 Fatou の定理 (Carleson (1962) [13]))

h を $\mathbb{R}^n_+$ 上の調和関数で $E \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ で非接有界なものとすると，ほとんどすべての $\xi \in E$ に対して h の非接境界値が存在する.



- E で非接有界とは $\xi \in E$ に対して ξ を頂点とする非接錐 $\Gamma(\xi)$ が存在して h は $\Gamma(\xi)$ で有界
- 非接錐 $\Gamma(\xi)$ の開きと大きさを一定と思ってよい
- 適当な定数を足しておけば h は $\Gamma(\xi)$ で正としてよい
- 非接錐の和集合は Lipschitz 領域
- Lipschitz 領域上の正調和関数の非接境界値の存在に帰着

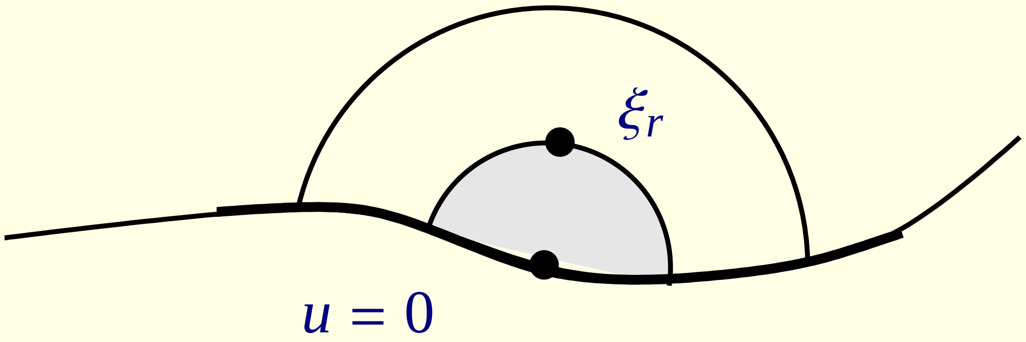
Lipschitz 領域に対しては $u(x) \not\approx \delta_D(x)$．例えば $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視すると，第 1 象限上の正調和関数 $h(z) = xy$ は原点の近くで距離の 2 乗のスピードで 0 に近づく.



Carleson は境界 Harnack 原理と密接な関係がある次の（一様）Carleson 評価を導き，局所的 Fatou の定理を証明した．

定義 4.2 (Carleson 評価 [13])

D を Lipschitz 領域とする．$\xi \in \partial D$ かつ $r > 0$ を小さい正の数とする．$\xi_r \in S(\xi, r) \cap D$ を $\delta_D(\xi_r) \approx r$ となる点とする．この ξ_r のように ξ からの距離と，境界 ∂D からの距離が比較可能な点を非接点という．このとき，u が D で正調和で，$\partial D \cap B(\xi, Cr)$ で $u = 0$ ならば

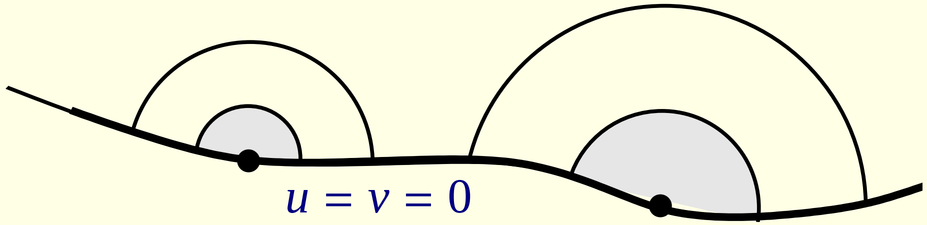


$$u(x) \leq Cu(\xi_r) \quad (x \in D \cap B(\xi, r)).$$

- Lipschitz 領域の境界点ξを頂点とする開きと大きさが一定の錐が領域の内側と外側に取れること（内部および外部錐条件）
- Hunt-Wheeden [21] と [22] は Carleson の方法を Lipschitz 領域に適用し，Martin 境界が位相境界と一致することを示した.
- Kemper [26] は Lipschitz 領域に対する境界 Harnack 原理をはっきりと定式化した．証明にはギャップ.
- Lipschitz 領域に対する境界 Harnack 原理．Ancona [7], Dahlberg [14], Wu [34]
- 境界 Harnack 原理には 2 通り．一様境界 Harnack 原理が重要.

定義 4.3 (一様境界 Harnack 原理)

$\xi \in \partial D$ かつ $r > 0$ を小さい正の数とする．u, v が領域 $D \cap B(\xi, Cr)$ で正調和で $\partial D \cap B(\xi, Cr)$ で $u = v = 0$ ならば



$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)} \le C \quad (x, y \in D \cap B(\xi, r)).$$

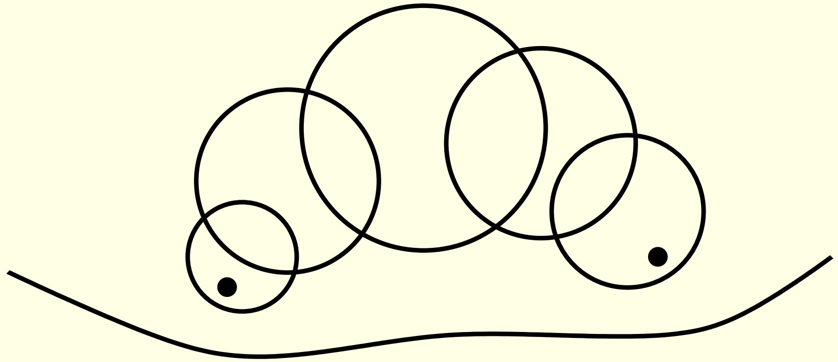
ただし $C > 1$ は ξ, r, u, v によらない.

定理 4.4

Lipschitz 領域では一様境界 Harnack 原理がなりたつ.

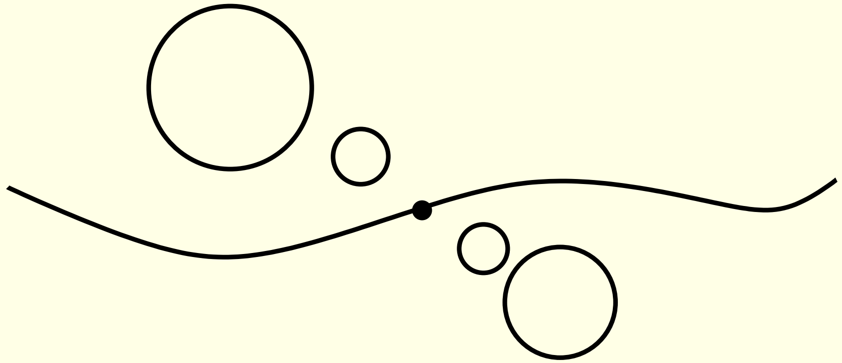
4.2. NTA 領域. 領域 D 内の球の列 $\{B(x_j, \frac{1}{2}\delta_D(x_j))\}_{j=1}^N$ が順番に共通部分を持ち，$x \in B(x_1, \frac{1}{2}\delta_D(x_1))$ かつ $y \in B(x_N, \frac{1}{2}\delta_D(x_N))$ となっているとき，x と y を結ぶ長さ N の Harnack 鎖という.

次元にのみ依存する定数 $C > 1$ で以下をみたすものがある．h を D 内の正調和関数とする．2 点 x と y が長さ N の Harnack 鎖で結ばれるならば, $h(x)/h(y) \le C^N$ となる.

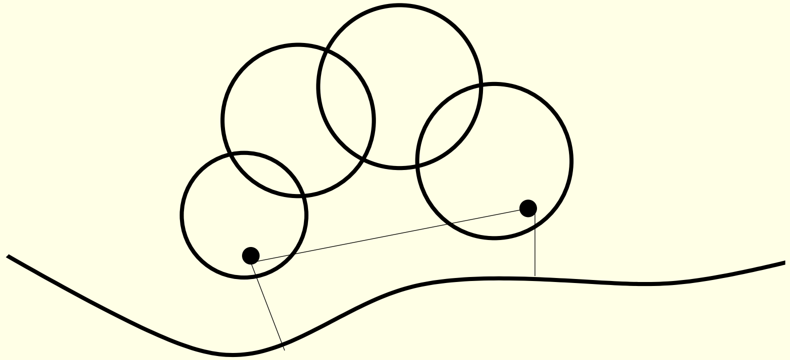


Jerison-Kenig [23] は Lipschitz 領域を一般化した NTA 領域 (Non-Tangentially Accesible domain) を $C > 1$ と $r_0 > 0$ があって，以下の 3 条件をみたすものと定義した.

- **Corkscrew 条件.**
  任意の境界点 $\xi \in \partial D$ と $0 < r < r_0$ に対し $D \cap B(\xi, r)$ は半径 r/C の球を含む.



- **外部 corkscrew 条件.** 任意の境界点 $\xi \in \partial D$ と $0 < r < r_0$ に対し $B(\xi, r) \setminus D$ は半径 r/C の球を含む.
- **Harnack 鎖条件.**
  領域内の任意の 2 点 x, y の距離がそれぞれの点から境界までの距離と比較可能であるとき，x と y は長さが一定の Harnack 鎖で結べる.



- NTA $\Longrightarrow$ Carleson 以来の方法
- 一様境界 Harnack 原理
- Martin 境界が位相境界と一致
- 調和測度がダブリング測度であること,
- 局所的 Fatou の定理
- NTA 領域は Lipschitz 領域に比べて遥かに複雑
- 境界の Hausdorff 次元は $n-1$ を越えることがあり，境界の面測度を考えることができない.
- 調和測度は境界の面測度に絶対連続とは限らない.
- NTA 領域上の調和解析は調和測度に基づいて展開.

5. 様々な複雑領域とその上の正調和関数

NTA 領域の仮定のうち Corkscrew 条件と Harnack 鎖条件はは領域内部の条件であり，外部 corkscrew 条件外部の条件である．ここから領域の幾何学的条件は内部と外部に分かれてさらに発展していった．しばらく内部条件の発展を考察しよう．

5.1. Hölder 領域. 局所的に境界が α-Hölder 連続関数のグラフで表される領域を α-Hölder 領域という（$0 < \alpha \le 1$）．α を問題にしないとき単に Hölder 領域という．$\alpha = 1$ ならば，1-Hölder 領域は Lipschitz 領域である．$0 < \alpha < 1$ のときには，高次元では Hölder 領域はもはや Dirichlet 問題に関して正則になるとは限らない（Lebesgue のとげ）．それにもかかわらず，Bass-Burdzy [11] は Hölder 領域に境界 Harnack 原理を拡張した．

- 確率論的手法.
- 外部条件は不要，内部条件だけから境界 Harnack 原理.
- 境界 Harnack 原理は一様ではなく Martin 境界の決定には不十分.

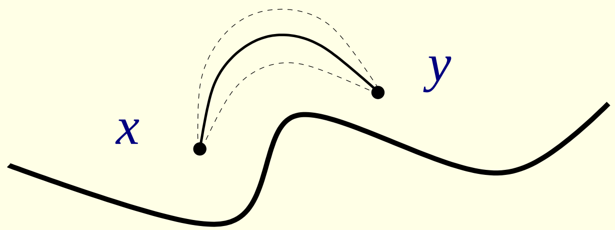
5.2. 一様領域. BMO 関数や Sobolev 関数の拡張可能性，および擬等角写像と深い関係 ([17], [24], [25], [16], [32])

定義 5.1 (一様領域)

D が一様領域とは D 内の任意の 2 点 x, y に対して，x と y を結ぶ D 内の曲線 γ で

$$\ell(\gamma) \le C|x-y|,$$

$$\min\{\ell(\gamma(x,z)), \ell(\gamma(z,y))\} \le C\delta_D(z) \quad (z \in \gamma)$$



をみたすものが存在するときをいう．ただし $\ell(\gamma)$ は曲線 γ の長さを表し，$\gamma(x,z)$ は γ の部分弧で x と z を結ぶものを表す.

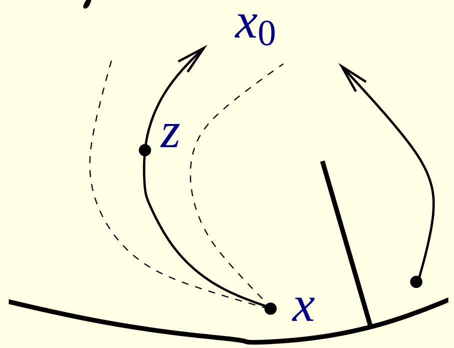
- x と y を端に持ち，全長が $|x-y|$ の定数倍で押さえられる，途中で膨らむ葉巻のような物が D 内に取れる．葉巻条件，葉巻曲線.
- NTA 領域の Corkscrew 条件と Harnack 鎖条件をみたすものが一様領域.
- Lipschitz 領域や NTA 領域は一様領域.
- 一様領域に対しては一様境界 Harnack 原理が成立し，Martin 境界は位相境界と一致.

5.3. John 領域. 一様領域では x, y が D 内を自由に動けたが，一方を $y = x_0$ と固定し，x のみ動かして同じ条件をみたすときに D を John 領域，x_0 を John 中心という．より正確に言うと

定義 5.2 (John 領域)

D 内の任意の点 x に対して，x と x_0 を結ぶ曲線 γ で

$$\delta_D(z) \geq c_J \ell(\gamma(x, z)) \quad (z \in \gamma)$$



をみたすものが存在するとき，この曲線を John 曲線と呼び，D を John 定数 c_J の John 領域という．

- 中心 x_0 は D 内の固定したコンパクト集合に取り替えてもよい.
- John 定数 c_J は $0 < c_J \le 1$ であって，c_J が 1 に近ければ近いほど領域が滑らかに近いことを表す.
- John 領域の条件は各点 x から x_0 に向かう開きが一定の捻れた錐が取れることを意味する.
- 幾何学的形状から人参条件ともいう.
- 葉巻条件で葉巻の長さが $|x - y|$ の定数倍で押さえられるという条件を落すと人参条件と同値.
- John 領域に対しては弱境界 Harnack 原理が成立し，極小 Martin 境界点の個数に応用できる.

5.4. 擬双曲距離条件. D を $\partial D \neq \emptyset$ となる任意の領域とする.

定義 5.3

$x, y \in D$ の擬双曲距離:

$$k_D(x,y) = \inf_{\widetilde{xy}} \int_{\widetilde{xy}} \frac{ds}{\delta_D(z(s))}.$$

ただし，下限は x と y を D 内で結ぶ曲線 $\widetilde{xy}$ に関して取る.

擬双曲距離 $k_D(x,y)$ は x と y を結ぶ最小の Harnack 鎖の長さに比較可能である.

定理 5.4

任意の領域 D とその内部の 2 点 x, y に対して

$$k_D(x,y) \geq \log\left(\frac{|x-y|}{\min\{\delta_D(x), \delta_D(y)\}} + 1\right).$$

証明. γ を x と y を D 内で結ぶ長さ L の曲線とする．このとき $|x-y| \leq L$ である．さらに弧長 s によるパラメータ表示から $0 \leq s \leq L$ のとき $\delta_D(z(s)) \leq \delta_D(x) + s$ である．よって

$$\int_\gamma \frac{ds}{\delta_D(z(s))} \geq \int_0^L \frac{ds}{\delta_D(x)+s} = \Big[\log(\delta_D(x)+s)\Big]_0^L \geq \log\left(1 + \frac{|x-y|}{\delta_D(x)}\right).$$

x と y を交換した不等式も成立するので，求める式を得る． □

上の逆向きの不等式が一様領域を特徴付ける．

定理 5.5 ([17])

D が一様領域であることは，任意の $x, y \in D$ に対して

$$k_D(x,y) \le C \log\left(\frac{|x-y|}{\min\{\delta_D(x), \delta_D(y)\}} + 1\right) + C'$$

となることと同値である.

また John 領域は次の性質を持つ.

定理 5.6

John 領域 D は擬双曲距離条件:

$$k_D(x, x_0) \le C \log \frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)} + C' \quad (x \in D)$$

をみたす．特に c_J を D の John 定数とすると，$C = 1/c_J$ と取れる．

証明. γ を x と x_0 を結ぶ長さ L の John 曲線とする．このとき，

$$\int_\gamma \frac{ds}{\delta_D(z)} = \int_0^{\delta_D(x)/4} + \int_{\delta_D(x)/4}^{L} \frac{ds}{\delta_D(z)}$$

$$\le \frac{\delta_D(x)/4}{3\delta_D(x)/4} + \int_{\delta_D(x)/4}^{L} \frac{ds}{c_J s} \le \frac{1}{c_J} \log \frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)} + C.$$

□

注意 5.7

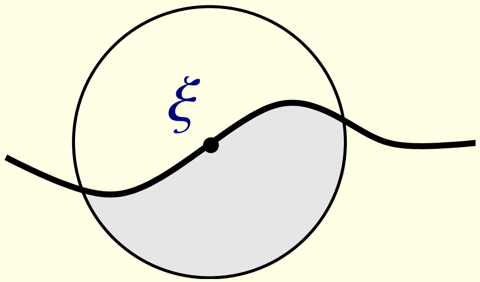
上の定理の逆は成立しない．すなわち，擬双曲距離条件をみたすが John 領域でないものが存在する．擬双曲距離条件をみたす領域を Smith-Stegenga [30] は Hölder 領域と呼んでいる．これは前記の Bass-Burdzy の Hölder 領域とは異なることに注意する．

5.5. 容量密度条件. 外部条件は次のように一般化される．Green 関数を持つ開集合 U 上の Green 容量を $\mathbf{Cap}_U(E)$ で表す.

定義 5.8 (容量密度条件)

D が容量密度条件 (Capacity density condition)，略して CDC，を満たすとは，正の定数 λ と r_0 があって，すべての $\xi \in \partial D$ と $0 < r < r_0$ に対して

$$\frac{\mathbf{Cap}_{B(\xi,2r)}(B(\xi,r)\setminus D)}{\mathbf{Cap}_{B(\xi,2r)}(B(\xi,r))} \ge \lambda$$



となることと定義する.

注意 5.9

Cap を 2 次元の時は対数容量，3 次元以上の時は Newton 容量とすれば上の条件は $n = 2$ のとき，**Cap**$(B(\xi, r) \setminus D) \geq Cr$，$n \geq 3$ のとき，**Cap**$(B(\xi, r) \setminus D) \geq Cr^{n-2}$ と同値である．体積密度条件: $\dfrac{|B(\xi, r) \setminus D|}{|B(\xi, r)|} \geq C$ は CDC の十分条件となる．外部錐条件をみたす領域は明らかに CDC を満たす．特に，滑らかな領域や Lipschitz 領域は CDC をみたす．

注意 5.10

D 上の正優調和関数 s は $\varepsilon > 0$ があって $\Delta s(x) + \dfrac{\varepsilon}{\delta_D(x)^2} s(x) \leq 0$ となるとき強 barrier という．強 barrier の存在は Hardy の不等式と同値であり，CDC から強 barrier の存在が分かる ([8])．強 barrier は Cartan-Hadmard 多様体上の境界 Harnack 原理に応用された ([9]).

5.6. 複雑領域のまとめ. 今まで出てきた領域をまとめると

$C^{2,\alpha}$-領域 $\subsetneqq$ $C^{1,1}$-領域 $=$ 球条件 $\subsetneqq$ Lipschitz 領域 $\subsetneqq$ NTA 領域
$\subsetneqq$ 一様領域 $\subsetneqq$ John 領域 $\subsetneqq$ 擬双曲距離条件.

NTA 領域までは外部条件が課されており，領域は Dirichlet 問題に対して正則であるのに対し，一様領域より一般な領域は内部条件だけしかみたさないため，領域は一般には非正則である．また外部条件に着目すれば

球条件 $\subsetneqq$ 外部錐条件 $\subsetneqq$ 体積密度条件 $\subsetneqq$ 容量密度条件
$\subsetneqq$ 強 barrier の存在

6. 一様領域の一様境界 Harnack 原理 — 証明の核心 —

Carleson の証明やそれ以降の議論

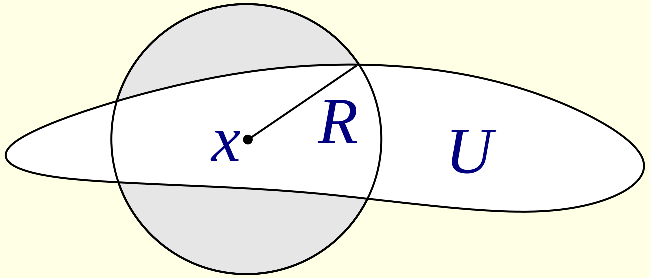
Lipschitz 領域 $\Longrightarrow$ 外部錐条件 $\Longrightarrow$ 一様な barrier.

- 領域の外部条件は必然?
- 一様領域や John 領域は内部だけの条件．一様な barrier は存在しないし，領域は非正則.
- NTA 領域との決定的な違い.
- 外部条件不要．内部条件だけからの議論可能.
- Bass-Burdzy [11]．確率論.
- 外部条件が不要になる理由．容量的幅.

定義 6.1 (容量的幅)

$0 < \eta < 1$ に対し，U の容量的幅を

$$w_\eta(U) = \inf\left\{R > 0 : \frac{\mathbf{Cap}_{B(x,2R)}(B(x,R) \setminus U)}{\mathbf{Cap}_{B(x,2R)}(B(x,R))} \geq \eta \quad (x \in U)\right\}.$$



注意 6.2

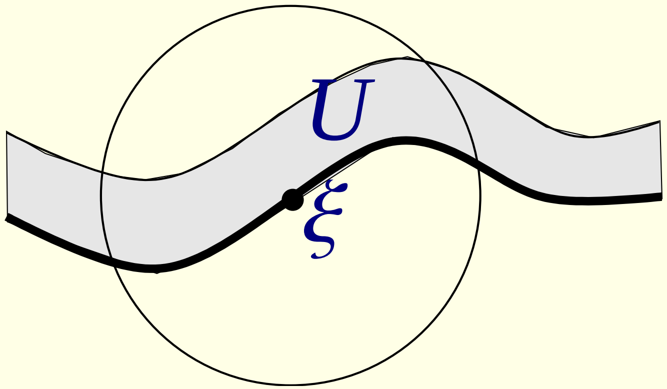
$0 < \eta < 1$ はそれほど重要ではない．異なった η' に対しては比較可能な容量的幅が定義される．

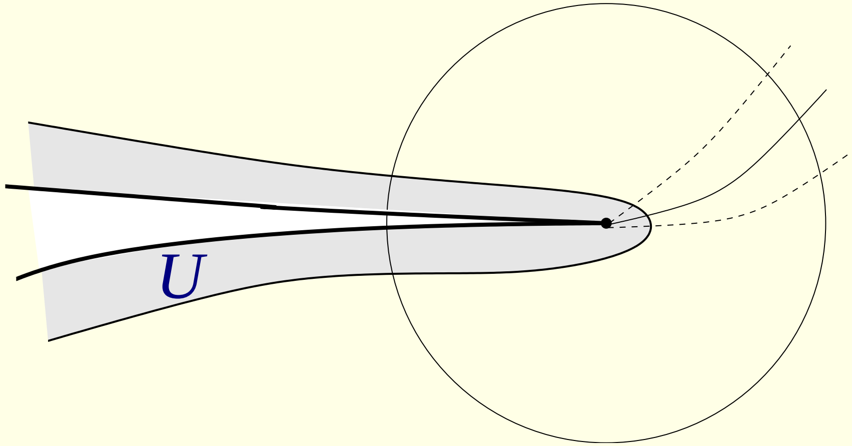
John 領域の様な非正則領域と容量密度条件をみたす正則領域は実は同じ性質をもつ.

補題 6.3

D を John 領域，または容量密度条件をみたす領域とする．このとき $r > 0$ が小さければ

$$w_\eta(\{x \in D : \delta_D(x) < r\}) \le Cr.$$

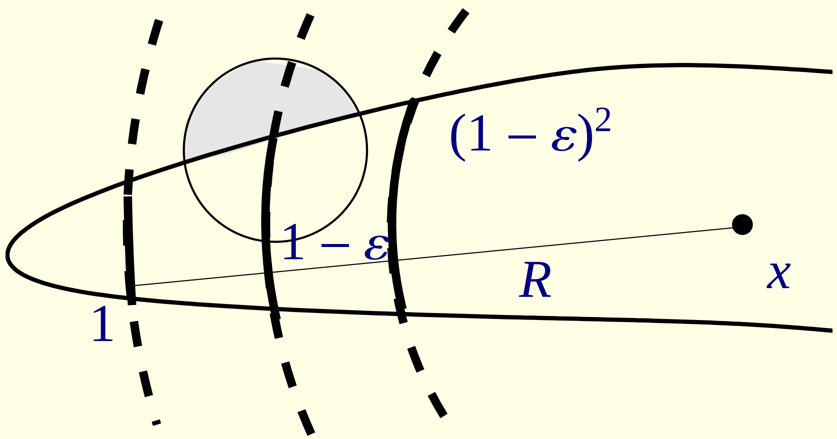




補題 6.4

次元 n と $\eta > 0$ にのみに依存した正定数 C_1 が存在して，任意の開集合 $U \neq \emptyset$，　$x \in U$ および $R > 0$ に対して

$$\omega(x; U \cap S(x,R), U \cap B(x,R)) \le \mathbf{exp}\left(2 - C_1 \frac{R}{w_\eta(U)}\right).$$



- 容量的幅による調和測度の評価.
- Green 関数と調和測度の比較．box argument.

- $\xi \in \partial D$.
- $\xi_R \in D \cap S(\xi, 4R)$, i.e., $\delta_D(\xi_R) \approx R$.
- G_R を $D \cap B(\xi, CR)$ の Green 関数.

補題 6.5

$C > 10$ を十分大きく取ると,

$$\omega(y; D\cap S(\xi,2R), D\cap B(\xi,2R)) \le CR^{n-2} G_R(y,\xi_R) \quad (y \in D \cap B(\xi,R)).$$

4 つの Green 関数の関係

$$\frac{G_R(x,y)}{G_R(x',y)} \approx \frac{G_R(x,y')}{G_R(x',y')} \quad (x, x' \in D \cap B(\xi,R),\ y, y' \in D \cap S(\xi,6R))$$

4 つの Green 関数の関係 $\Longrightarrow$ 一様境界 Harnack 原理.

定理 6.6

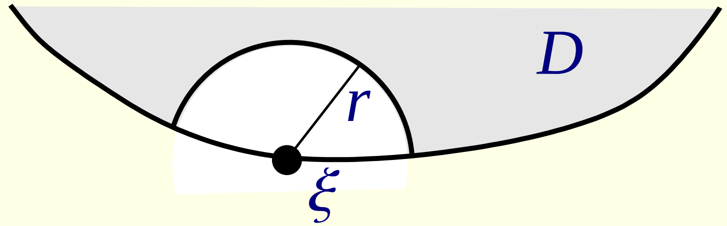
一様領域は一様境界 Harnack 原理をみたす．さらに，一様領域の Martin 境界は位相境界に一致し，各境界点は極小である．すなわち $\Delta = \Delta_1 = \partial D$.

証明. 定理の後半 (Kemper [26]). $\xi \in \partial D$ とする．

ξ における核関数，$\mathcal{H}_\xi$

- D 上の正調和関数 h，$h = 0$ q.e. on ∂D.
- 任意の $r > 0$ に対して $D \setminus B(\xi, r)$ で有界.
- $h(x_0) = 1$

- スケール不変な境界 Harnack 原理から
  $C^{-1} \le \dfrac{u}{v} \le C \ (u, v \in \mathcal{H}_\xi)$.



- $c = \sup\limits_{\substack{u,v\in\mathcal{H}_\xi \\ x\in D}} \dfrac{u(x)}{v(x)}$ とおくと $1 \le c < \infty$.
- $c = 1$ を矛盾によって示す．$c > 1$ と仮定する．
- 任意に $u,\ v \in \mathcal{H}_\xi$ をとると $v_1 = (cv - u)/(c-1) \in \mathcal{H}_\xi$.
- $u \le cv_1 = c(cv - u)/(c-1)$.
- $(2c-1)u \le c^2 v$ となるが，これは

$$c = \sup_{\substack{u,v\in\mathcal{H}_\xi \\ x\in D}} \frac{u(x)}{v(x)} \le \frac{c^2}{2c-1} < c \quad \text{矛盾}.$$

- $c = 1$ であり $\mathcal{H}_\xi$ は 1 点からなる．$u \in \mathcal{H}_\xi$ は極小である．□

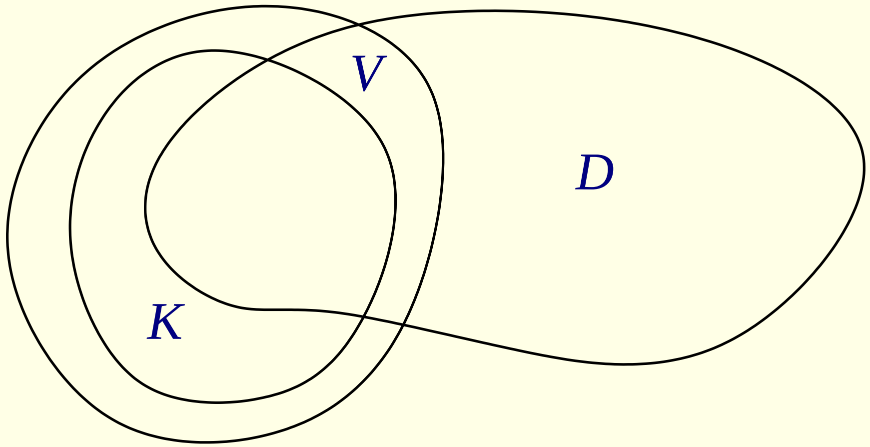
注意 6.7

容量密度条件の仮定の下では John 領域や一様領域は調和測度の性質や一様境界 Harnack 原理で特徴付けられる ([1]).

7. さらに進んで

- Martin 境界の基礎から今までの結果は [3] にまとめ.
- 境界 Harnack 原理と Carleson 評価の密接な関係.
- より精密に定式化 $\Longrightarrow$ 同値.

有界開集合 V とコンパクト集合 K の組 (V, K) で



(7.1) $$K \subset V,\ K \cap D \neq \emptyset,\ K \cap \partial D \neq \emptyset$$

定義 7.1

領域 D が大域的境界 Harnack 原理をみたすとは任意の組 (V, K) で (7.1) をみたすものに対して，D と (V, K) による正定数 C_2 が存在して以下の性質：u と v は D 上の正優調和関数で

(i) u と v は $V \cap D$ で有界かつ正調和,

(ii) $V \cap \partial D$ で $u = v = 0$ が極集合を除いて成立

ならば，$x, y \in K \cap D$ に対して $\dfrac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} \leq C_2$ となる.

定義 7.2

領域 D が大域的 Carleson 評価をみたすとは任意の組 (V, K) で (7.1) をみたすものおよび点 $x_0 \in K \cap D$ に対して, D と (V, K) および x_0 による正定数 C_3 が存在して以下の性質：u は D 上の正優調和関数で

(i) u は $V \cap D$ で有界かつ正調和,

(ii) $V \cap \partial D$ で $u = 0$ が極集合を除いて成立

ならば, $x \in K \cap D$ に対して $u(x) \leq C_3 u(x_0)$ となる.

定理 7.3 ([2])

領域 D が大域的境界 Harnack 原理をみたすことと大域的 Carleson 評価をみたすことは同値である.

- 劣調和関数の平均の不等式に基づいた Domar の方法
- 擬双曲距離条件をみたす領域に対して Carleson 評価を導くことができる ([4]).

定理 7.4

領域 D が擬双曲距離条件をみたすならば大域的境界 Harnack 原理をみたす.

注意 7.5

- Carleson 評価は距離測度空間上の p-調和関数にまで拡張できる ([6]).
- Carleson 評価と境界 Harnack 原理の同値性の証明は線形の時のみ成立.
- 調和測度と Green 関数の関係.
- p-調和関数の境界 Harnack 原理は不明である.
- Lewis-Nyström [27] によれば Lipschitz 領域で p-調和関数の境界 Harnack 原理が成り立つようである．その証明は非常に深い.

注意 7.6

- $\mathbb{R}^n$ 内の領域上の調和関数は α-調和関数に拡張 ($0 < \alpha \leq 2$).
- $\alpha = 2$ のときが古典的な調和関数.
- $0 < \alpha < 2$ のときは α-調和性は局所的な性質ではない.
- 確率論では α-stable process が対応.
- $0 < \alpha < 2$ のとき，Song-Wu [31] や Bogdan etal [12] は α-調和関数に対する境界 Harnack 原理を任意の領域に対して確率論的に証明.

参 考 文 献

[1] Hiroaki Aikawa. Potential-theoretic characterizations of nonsmooth domains. Bull. London Math. Soc., Vol. 36, No. 4, pp. 469–482, 2004. [51]

[2] Hiroaki Aikawa. Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate. Math. Scad., Vol. 103, No. 1, pp. 61–76, 2008. [55]

[3] 相川弘明. 複雑領域上のディリクレ問題 — ポテンシャル論の観点から (岩波数学叢書). 岩波書店, 2008. [53]

[4] Hiroaki Aikawa, Kentaro Hirata, and Torbjörn Lundh. Martin boundary points of a John domain and unions of convex sets. J. Math. Soc. Japan, Vol. 58, No. 1, pp. 247–274, 2006. [56]

[5] Hiroaki Aikawa, Tero Kilpeläinen, Nageswari Shanmugalingam, and Xiao Zhong. Boundary Harnack principle for p-harmonic functions in smooth Euclidean domains. Potential Anal., Vol. 26, No. 3, pp. 281–301, 2007. [22]

[6] Hiroaki Aikawa and Nageswari Shanmugalingam. Carleson-type estimates for p-harmonic functions and the conformal Martin boundary of John domains in metric measure spaces. Michigan Math. J., Vol. 53, No. 1, pp. 165–188, 2005. [56]

[7] Alano Ancona. Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), Vol. 28, No. 4, pp. 169–213, 1978. [26]

[8] Alano Ancona. On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbf{R}^n$. J. London Math. Soc. (2), Vol. 34, No. 2, pp. 274–290, 1986. [42]

[9] Alano Ancona. Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary. Ann. of Math. (2), Vol. 125, No. 3, pp. 495–536, 1987. [42]

[10] David H. Armitage and Stephen J. Gardiner. Classical potential theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London Ltd., London, 2001. [21]

[11] Richard F. Bass and Krzysztof Burdzy. A boundary Harnack principle in twisted Hölder domains. Ann. of Math. (2), Vol. 134, No. 2, pp. 253–276, 1991. [32, 45]

[12] Krzysztof Bogdan, Tadeusz Kulczycki, and Mateusz Kwaśnicki. Estimates and structure of α-harmonic functions. Probab. Theory Related Fields, Vol. 140, No. 3-4, pp. 345–381, 2008. [56]

[13] Lennart Carleson. On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables. Ark. Mat., Vol. 4, pp. 393–399, 1962. [23, 25]

[14] Björn E. J. Dahlberg. Estimates of harmonic measure. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 65, No. 3, pp. 275–288, 1977. [26]

[15] Pierre Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta. Math., Vol. 30, pp. 335–400, 1906. [11]

[16] Frederick W. Gehring and Olli Martio. Lipschitz classes and quasiconformal mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., Vol. 10, pp. 203–219, 1985. [33]

[17] Frederick W. Gehring and Brad G. Osgood. Uniform domains and the quasihyperbolic metric. J. Analyse Math., Vol. 36, pp. 50–74, 1979. [33, 38]

[18] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition. [22]

[19] George Green. Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Nottingham, 1828. [8]

[20] Axel Harnack. Existenzbeweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume. In Math.-Phys., pp. 144–169. Ber. Königl. Sächs. Gesell. Wiss., Leipzig, 1886. [19]

[21] Richard A. Hunt and Richard L. Wheeden. On the boundary values of harmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 132, pp. 307–322, 1968. [26]

[22] Richard A. Hunt and Richard L. Wheeden. Positive harmonic functions on Lipschitz domains. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 147, pp. 507–527, 1970. [26]

[23] David S. Jerison and Carlos E. Kenig. Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains. Adv. in Math., Vol. 46, No. 1, pp. 80–147, 1982. [28]

[24] Peter W. Jones. Extension theorems for BMO. Indiana Univ. Math. J., Vol. 29, No. 1, pp. 41–66, 1980. [33]

[25] Peter W. Jones. Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. Acta Math., Vol. 147, No. 1-2, pp. 71–88, 1981. [33]

[26] John T. Kemper. A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities. Comm. Pure Appl. Math., Vol. 25, pp. 247–255, 1972. [26, 50]

[27] John L. Lewis and Kaj Nyström. Boundary behaviour for p harmonic functions in Lipschitz and starlike Lipschitz ring domains. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), Vol. 40, No. 5, pp. 765–813, 2007. [56]

[28] Robert S. Martin. Minimal positive harmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 49, pp. 137–172, 1941. [13, 17]

[29] Siméon D. Poisson. Mémoir sur le calcul numérique des integrales définies. Mémoires de l'acad. Royale des sci. de l'institute de France, No. iv, pp. 571–602, 1823, published 1827. [9]

[30] Wayne Smith and David A. Stegenga. Exponential integrability of the quasi-hyperbolic metric on Hölder domains. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., Vol. 16, No. 2, pp. 345–360, 1991. [40]

[31] Renming Song and Jang-Mei Wu. Boundary Harnack principle for symmetric stable processes. J. Funct. Anal., Vol. 168, No. 2, pp. 403–427, 1999. [56]

[32] Jussi Väisälä. Uniform domains. Tohoku Math. J. (2), Vol. 40, No. 1, pp. 101–118, 1988. [33]

[33] Kjell-Ove Widman. Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations. Math. Scand., Vol. 21, pp. 17–37 (1968), 1967. [22]

[34] Jang-Mei G. Wu. Comparisons of kernel functions, boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), Vol. 28, No. 4, pp. 147–167, 1978. [26]