大学数学のための準備　(北海道大学理学部数学科編)

数学では専用の記号や数式を用いて条件や概念を記述します．それらによって論理的に議論したり計算を行うことができるのです．そして定理や公式を証明したり応用したりします．このような過程において使用される文字や記号や式は大変重要です．皆さんには大学数学の勉強においてそれらに習熟し使いこなすようになることを期待します．本冊子では数学の基本的な記号や用語について述べます．いくつかはすでに知っていることでしょう．それらももういちど知識として確認してください．記号や数式や数学用語を正確に記述することは数学の勉強のため是非必要です．最も基本的なものをまとめておきます．

§1．ギリシャ文字, ローマ数字, ドイツ文字

数学では数式を記述するため多くの文字を使用します．中学高校までの勉強では次のようなローマ字

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$$

$$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$$

を多用しますので，これらには慣れ親しんでいると思います．ギリシア文字については，我々は学術的な書物以外ではあまりお目にかかことはありません．しかし，数学を含め数理的な科学では (たくさんの文字が必要になるため) ギリシャ文字もローマ字同様に頻繁に現れます．下の表にギリシア文字, ローマ数字 (アラビア数字との対応) およびドイツ文字 (のいくつか) をまとめました．読み方や書き方を覚えておきましょう．

ギリシア文字		カタカナ表記	英語表記
(A)	α	アルファ	alpha
(B)	β	ベータ	beta
Γ	γ	ガンマ	gamma
Δ	δ	デルタ	delta
(E)	ε	イプシロン	epsilon
(Z)	ζ	ゼータ	zeta
(H)	η	エータ	eta
Θ	θ	シータ	theta
(I)	ι	イオタ	iota
(K)	κ	カッパ	kappa
Λ	λ	ラムダ	lambda
(M)	μ	ミュー	mu
(N)	ν	ニュー	nu
Ξ	ξ	グザイ	xi
(O)	(o)	オミクロン	omicron
Π	π	パイ	pi
(P)	ρ	ロー	rho
Σ	σ	シグマ	sigma
(T)	τ	タウ	tau
Υ	(υ)	ユプシロン	upsilon
Φ	$\varphi\,\phi$	ファイ	phi
(X)	χ	カイ	chi
Ψ	ψ	プサイ	psi
Ω	ω	オメガ	omega

ローマ数字	アラビア数字
	0
I	1
II	2
III	3
IV	4
V	5
VI	6
VII	7
VIII	8
IX	9
X	10
XI	11

ドイツ文字	カタカナ表記
$\mathfrak{A}$	アー
$\mathfrak{B}$	ベー
$\mathfrak{D}$	デー
$\mathfrak{F}$	エフ
$\mathfrak{L}$	エル
$\mathfrak{M}$	エム
$\mathfrak{N}$	エヌ
$\mathfrak{R}$	エール
$\mathfrak{S}$	エス
$\mathfrak{X}$	エクス

§2. 代表的な集合

数学で非常によく現れる集合について述べます．自然数，整数，有理数，実数など中学高校までも個別的にはしばしば登場してきました．大学ではそれぞれを集合として全体的に扱うことも必要になります．集合としての記号は以下のように定められ，国際的にも共通のものとなっています．

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 自然数全体の集合．$\mathbb{N}$ とも書く．

$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 整数全体の集合．$\mathbb{Z}$ とも書く．

$\mathbf{Q} = \{q/p \mid p, q \in \mathbf{Z}, p \neq 0\}$ 有理数全体の集合．$\mathbb{Q}$ とも書く．

$\mathbf{R}$ 実数全体の集合．$\mathbb{R}$ とも書く．図形的には直線とも見なせる．

$\mathbf{C}$ 複素数全体の集合 $\{x + y\,i \mid x, y \in \mathbf{R}\}$．$i$ は虚数単位である ($i^2 = -1$)．$\mathbb{C}$ とも書く．図形的には平面とも見なせる (このときの平面を複素平面という)．

$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ 2 次元ユークリッド空間，あるいは，2 次元平面．

$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$ 3 次元ユークリッド空間，あるいは，3 次元空間．

§3. 集合

数学的に規定された “もの” の集まりを集合といいます．集合を $X, Y, Z, \dots$ など大文字で表し，集合の要素 (あるいは元とも言う) には $x, y, z, \dots$ など小文字を用いることが普通です．x が集合 X の要素であること，あるいは x が X に属することを

$$x \in X$$

と表します．これは $X \ni x$ と書いても同じことです．x が X に属しないことを $x \notin X$ または $X \not\ni x$ と書きます．たとえば $3 \in \mathbf{N}$．

複数の集合を扱う際に互いの関係が重要になることもあります．まず包含関係について述べましょう．

$$X \subset Y$$

これは集合 X が集合 Y に包含されること，言い換えると『X のすべての要素が Y に属すること』です．これを $Y \supset X$ とも書きます．また，X は Y の**部分集合**であると言います．上の例では $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ となっています．空集合は $\emptyset$ で表わします．

集合を表すにはいろいろな方法があります．例をあげてみましょう．

$$X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

を考えます．これは要素をすべて羅列する方法ですが，一方

$$X = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ は } 9 \text{ 以下の正の奇数}\}$$

と表すことも可能です．また集合はなるべく単純で理解しやすい形に表すことが論理的にも技術的にも望まれます．次の例として

$$Y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leqq 0\}$$

を考えます．これは実数 x のうち不等式 $x^2 - 3x + 2 \leqq 0$ を満たすようなもの全体という意味です．2 次式を因数分解すれば $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$ ですから Y は 1 以上 2 以下の実数 x の全体と言い換えることができます．次の例は

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x + y > 0\}$$

ですが，これは原点を中心とする半径 1 の円の内部のうち直線 $x + y = 0$ で区切られた一方の側 ($x + y > 0$ の領域) に属する点 (x, y) の全体ということになります．E のような場合は要素が無数に存在するのですべての要素を羅列式に表すことが困難です．

よって，このように条件式を用いて集合を規定しているのです．また変数やパラメータを用いて集合を表すこともできます．たとえば

$$V = \{2m-1 \in \mathbf{Z} \mid m \in \mathbf{N}\} \quad (\text{正の奇数全体})$$
$$W = \{(2\cos t, \sin t) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqq t < 2\pi\} \qquad (\text{楕円})$$

などです．

§4. 集合の演算と操作

集合が複数個あるとそれらを操作して新たな集合を定めることができます．まず集合算と呼ばれる演算について述べます．
２つの集合 A, B にたいして **和集合** (あるいは **和**) $A \cup B$, **共通部分** $A \cap B$, **差** $A \setminus B$ を次のように定めます．

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

$A \setminus B$ は $A - B$ と書くこともあります．数の引き算のマイナスと意味が異なるのでそれを意識するため普通は横棒を斜めにします．さて上の集合算には次の法則が成立します．

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

このような集合算は一定の集合 X (全体集合とよぶ) があって，その部分集合同士で行われるのが普通です．X を全体集合とし, $A \subset X$ にたいして $X \setminus A$ を A の X における**補集合**といい A^c と書きます．$A \subset X, B \subset X$ にたいして

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (\text{ド・モルガンの法則})$$

が成り立ちます．
その他の集合の操作として集合の直積について述べます．２つの集合 A, B があったときに，それぞれから取った要素 a, b の組 (a, b) の全体を考え A と B の**直積集合**といいます．

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

たとえば $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ となります．すなわち２次元平面は実数の集合と実数の集合の直積です．

§5. 条件と論理

数学では条件が複数あったときにそれらのあいだの関係を論じることがしばしば重要になります．高校でも学びましたがここで復習しておきましょう．2 つの条件 A, B があったとき，“A ならば B ” のことを記号で

$$A \Longrightarrow B$$

と表します．また

$$B \Longleftarrow A$$

も同じことを意味します．この A と B の関係を “A は B であるための**十分条件** である” と言います．また，“B は A であるための**必要条件**である” とも言います．

$A \Longrightarrow B$ かつ $B \Longrightarrow A$ を満たすとき，”A と B は**同値**である” と言い，

$$A \Longleftrightarrow B$$

と書きます．A は B であるための**必要十分条件**であると言います． 例をあげましょう．整数 x に対する次の条件として

条件 A: x は 6 の倍数

条件 B: x は 3 の倍数

を考えます．この場合 A ならば B だから $A \Longrightarrow B$ となります．条件 A をみたす x の全体は，条件 B をみたす x の全体に包含されます．このように２つの条件の強弱が，対応する集合では包含関係に関連します．これについては次の例をみるとより明確に理解できます．点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対する次の条件

条件 E: $x^2 + y^2 \geqq 4$

条件 F: $|x| \geqq \sqrt{2}$ かつ $|y| \geqq \sqrt{2}$ をみたす

条件 G: $|x| + |y| \geqq 2$

を考えます．このとき $F \Longrightarrow E$ となります．しかし $G \Longrightarrow E$ とはなりません. 図をかいて理解しておいてください.

その他の記号.

数学の講義で条件を記述する際によく現れる論理記号として, $\forall$, $\exists$ があります．これの用法を説明します.

(i) 『 $\forall x$, ... 』 は 『任意の x にたいして ... 』の意味です. 次の記述が例としてあがります.

例： 『$\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geqq 0$』.

(ii) 『 $\exists x$, ... 』 は 『... をみたす x が存在する．』の意味です.

例：『$\exists x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0$』．これは 『$f(x) < 0$ となるような実数 x が存在する』という意味になります．この条件は, もし $f(x) = x^2 - 2x$ なら成立し，$f(x) = x^2 + 6x + 9$ なら成立しないことを確認してください.

最後にひとこと: 数学では文字や記号や言葉の意味を理解することが上達の第 1 歩です．疑問があるときは担当教員などにどんどん質問してください．また，自分で調べたいときは図書室で参考書や文献にあたることも良いと思います．数学用語や解説については次のような数学の辞典がありますので北大図書館や理学部数学図書室を訪問することをすすめます.

岩波数学入門辞典 (岩波書店)

岩波数学辞典第 4 版（岩波書店)